Contenidos

APÉNDICE A

Preliminares sobre Secciones Cónicas

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

1. Relaciones Básicas y Geometría Analítica

El ambiente de trabajo será el plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}\}$, es decir

$$u \in \mathbb{R}^2 \iff u = (x, y) : \; x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$$

Y la necesaria forma de diferenciar los elementos del plano.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Y su diseño es el tradicional:

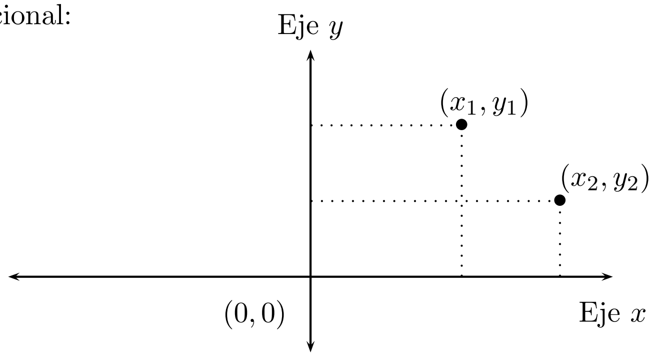


Figura 1: Plano Cartesiano

Observación 1.1. *Si hacemos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ entonces podemos calcular la distancia de P a Q, como sigue.*

(1) *Completamos el dibujo de la figura anterior:*

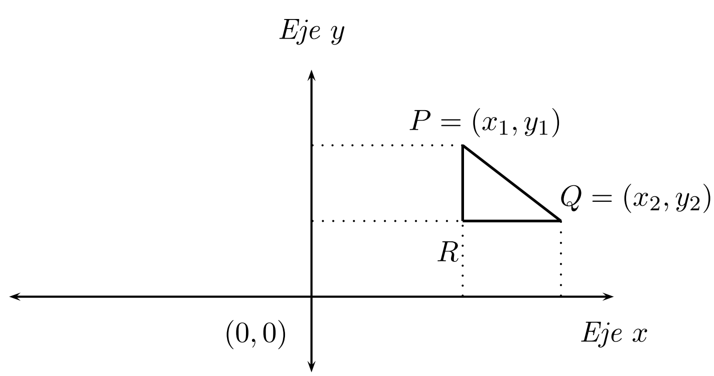


Figura 2: Distancia entre puntos

(2) *Aplicamos el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo PRQ para obtener la representación formulística:*

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 \Longleftrightarrow \overline{PQ} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \qquad \textit{distancia de } P \textit{ a } Q$$

Esto motiva hacer la siguiente definición.

Definición 1.2. *Llamaremos distancia del punto P al punto Q, en símbolos $d(P,Q)$ a:*

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}} \tag{1}$$

Ejemplo 1.2.1. $d((2,3),(1,4)) = \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$

Ejemplo 1.2.2. $d((4,2),(0,0)) = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5}$

Ejemplo 1.2.3. $d((2,3),(2,3)) = \sqrt{(2-2)^2 + (3-3)^2} = 0$

Lema 1.3. *La distancia definida en (1) verifica las siguientes propiedades:*

(1) $d(P,Q) \geq 0$ *y* $d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$

(2) $d(P,Q) = d(Q,P)$

(3) $d(P,Q) \leq d(P,R) + (R,Q)$

1.4. Ejercicios Propuestos.

(1) Calcule la distancia entre los puntos que se proponen:

(a) $d((4,1),(1,-2))$ (b) $d((1,0),(0,1))$ (c) $d((1,1),(5,-1))$

(2) Determine y grafique el conjunto $\mathbb{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(0,0)) = 4\}$

(3) Determine y grafique el conjunto $\mathbb{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(0,0)) = 0\}$

(4) Determine y grafique conjunto $\mathbb{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 1\}$

(5) Demuestre las propiedades planteadas en el lema 1.3

2. Función Lineal

Definición 2.1. *Una función se llamará función lineal en $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}$ si existen $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que*

$$l(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}) \tag{2}$$

Ejemplo 2.1.1. $l(x) = 3$

Ejemplo 2.1.2. $l(x) = 5x$

Ejemplo 2.1.3. $l(x) = -2x + 4$

Si $l(x) = ax + b$ tal que $x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}$ es una función lineal entonces para determinar la función completamente basta con conocer sus elementos esenciales, es decir, su dominio $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$. en consecuencia iniciamos con los casos posibles.

(1) Si $a = 0$ entonces $l(x) = b$ para $x \in \mathbb{U}$, y la llamaremos función constante y su gráfico es el conjunto:

$$C(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \in \mathbb{U}) \wedge y = b\} \tag{3}$$

Así que tenemos tres casos posibles, según $b > 0 \vee b = 0 \vee b < 0$.

- $\mathbb{U} = [-4, 4] \wedge (b > 0)$

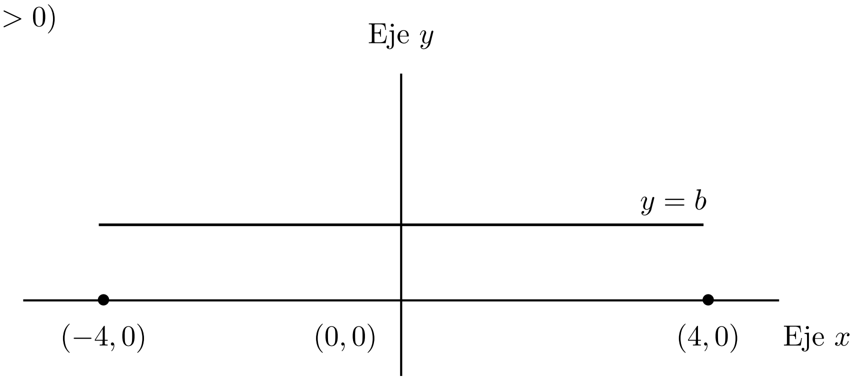


Figura 4: $y = b > 0$

- $\mathbb{U} = [-4, 4] \wedge (b = 0)$

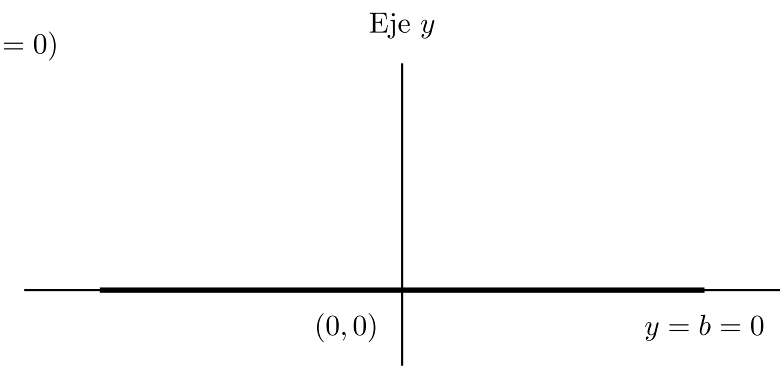


Figura 5: $y = 0$

- $\mathbb{U} = [-4, 4] \wedge (b < 0)$

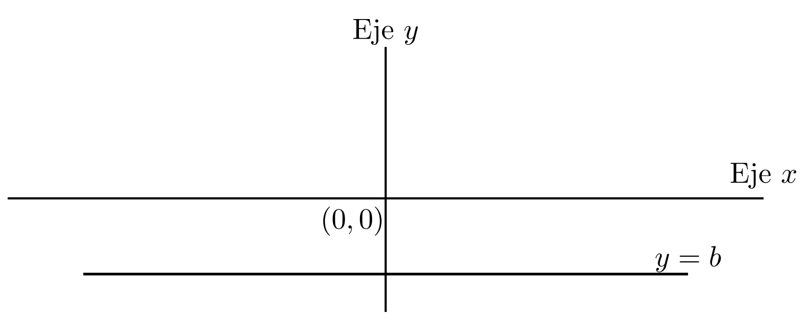


Figura 6: $y = b < 0$

(2) si $a \neq 0$ entonces su gráfico es el conjunto

$$L(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$$

Como $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces tenemos dos subcasos:

2.1 $a > 0$, cuyo comportamiento es el siguiente:

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 < ax_2 \Longrightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Longrightarrow l(x_1) < l(x_2)$$

Es decir que el gráfico es del tipo:

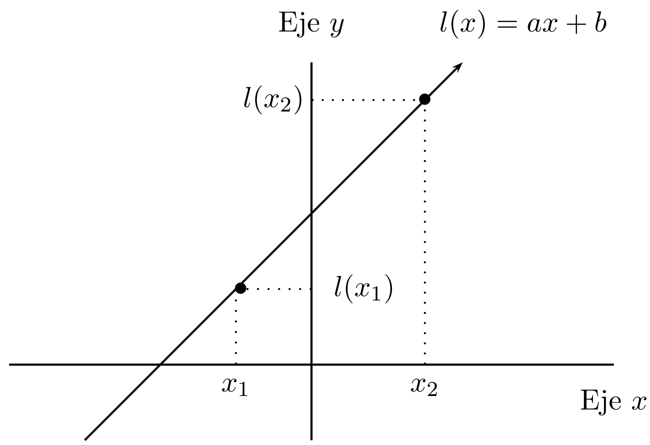


Figura 7: $y = ax + b$ $a > 0$

Este comportamiento caracteriza un proceso creciente, y corresponde a la definición de una función creciente, es decir,

$$l \nearrow \Longleftrightarrow (x_1 < x_2 \Longrightarrow l(x_1) < l(x_2)) \tag{4}$$

2.2 $a < 0$ cuyo comportamiento es el siguiente:

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 > ax_2 \Longrightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Longrightarrow l(x_1) > l(x_2)$$

Es decir que el gráfico es del tipo:

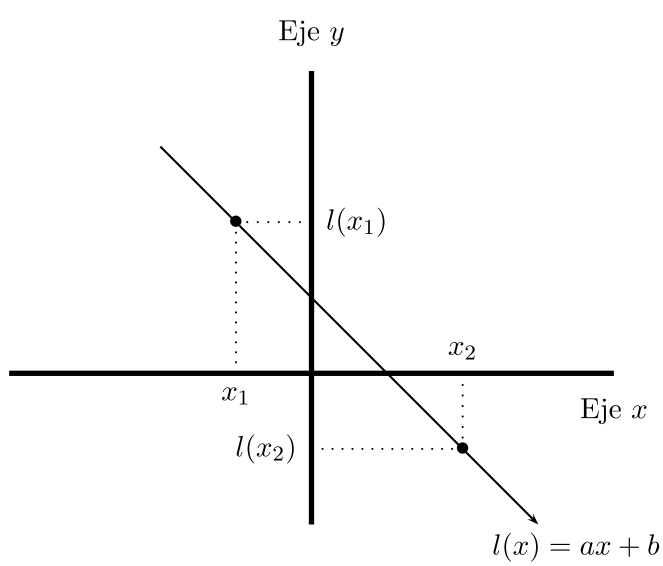


Figura 8: $y = ax + b$ $a < 0$

Esta representa a una función decreciente, es decir

$$l \searrow \Longleftrightarrow (x_1 < x_2 \Longrightarrow l(x_1) > l(x_2)) \tag{5}$$

Definición 2.2. *Si $l(x) = ax+b$ es una función lineal con dominio $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}$ entonces su gráfico es el conjunto de puntos:*

$$L(x) = \{(x, ax+b) \mid x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}\} \tag{6}$$

A este gráfico (6) lo llamaremos línea recta y a la ecuación $y = ax+b$ la llamaremos ecuación canónica de la recta y lo notaremos como sigue:

$$L : y = ax + b \tag{7}$$

Así que, tenemos la siguiente fórmula proposicional

$$u \in L \Longleftrightarrow u = (x_0, y_0) \wedge y_0 = ax_0 + b \tag{8}$$

Ejemplo 2.2.1. *Si $L : y = 2x-1$ entonces*

- $(2,3) \in L$, *pues* $3 = 2 \cdot 2 - 1$
- $(3,2) \notin L$, *pues* $2 \neq 2 \cdot 3 - 1 = 5$

Observación 2.3. *Consideremos la recta $L : y = ax+b$ y supongamos que $P \in L$ y $Q \in L$ y $P \neq Q$ entonces*

$$\begin{aligned} P \in L &\iff P = (x_1, y_1) \wedge y_1 = ax_1 + b \\ Q \in L &\iff Q = (x_2, y_2) \wedge y_2 = ax_2 + b \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} P \in L \wedge Q \in L &\iff \left.\begin{array}{ccccc} y_1 & = & ax_1 & + & b \\ y_2 & = & ax_2 & + & b \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) \\ &\Longrightarrow a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}; \qquad x_1 \neq x_2 \end{aligned}$$

Además sustituyendo en la primera ecuación el valor de a tenemos que

$$\begin{aligned} y_1 = ax_1 + b &\iff b = y_1 - ax_1 \\ &\iff b = y_1 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) x_1 \\ &\iff b = \frac{y_1(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)x_1}{x_1 - x_2} \\ &\iff b = \frac{y_1 x_1 - y_1 x_2 - y_1 x_1 + y_2 x_1}{x_1 - x_2} \\ &\iff b = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2} \end{aligned}$$

Conclusión 2.3.1. *De la observación anterior sigue que, dados $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ y $P \neq Q$ entonces existe una única recta L que pasa por P y Q cuya ecuación canónica es de la forma;*

$$\boxed{y \;=\; \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) x + \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2} \qquad (x_1 \neq x_2)} \tag{9}$$

Definición 2.4. $a = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (x_1 \neq x_2)$ *se llama la pendiente de la recta L*

Ejemplo 2.4.1. *Determinemos y grafiquemos la recta que pasa por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (-3, 5)$*

Solución

Etapa 1. Sea $L \,:\, y = ax + b$ la recta pedida

Etapa 2. Gestionemos la información

- $(1, 2) \in L \Longleftrightarrow 2 = a \cdot 1 + b$
- $(-3, 5) \in L \Longleftrightarrow 5 = a \cdot (-3) + b$
- *Luego,*

$$(1, 2) \in L \wedge (-3, 5) \in L \quad \Longleftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcrcr} 2 & = & a & + & b \\ 5 & = & -3a & + & b \end{array}\right| \Longrightarrow -3 = 4a \Longleftrightarrow a = -\frac{3}{4}$$

- *Sustituyendo el valor de a tenemos que*

$$b + a = 2 \Longrightarrow b = 2 + \frac{3}{4} \Longrightarrow b = \frac{11}{4}$$

Etapa 3. Para concluir, sustituyendo en L tenemos que la ecuación pedida es:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \Longleftrightarrow 4y + 3x - 11 = 0$$

Etapa 4. Grafiquemos la recta determinada.

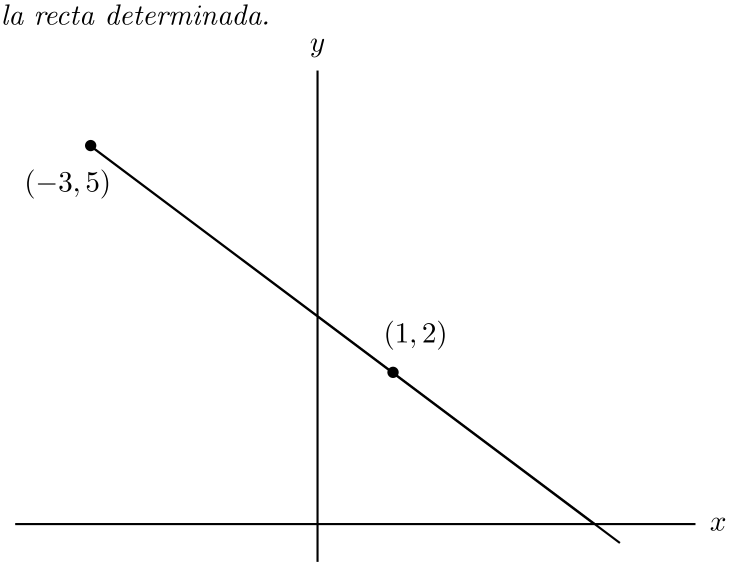


Figura 9: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$

3. Ecuaciones equivalentes para definir líneas rectas

Dadas las propiedades que poseen los números reales, es posible escribir la ecuación canónica de una recta de otras formas equivalentes, como las siguientes:

(1) La Ecuación General de una recta es de la forma.

$$\boxed{ax + by + c = 0} \tag{10}$$

En efecto

$$ax + by + c = 0 \iff y = -\frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b} \quad (b \neq 0)$$

(2) La Ecuación Punto Pendiente, para $P = (x_0, y_0)$ y pendiente a_L es de la forma:

$$\boxed{y - y_0 \quad = \quad a_L(x - x_0)} \tag{11}$$

En efecto

$$y - y_0 = a_L(x - x_0) \iff y = a_Lx + (y_0 - a_Lx_0)$$

4. Rectas Paralelas

Si consideramos las recta $L : y = 2x + 1$ y $L' : y = 2x + 2$ entonces sus gráficos son de la forma:

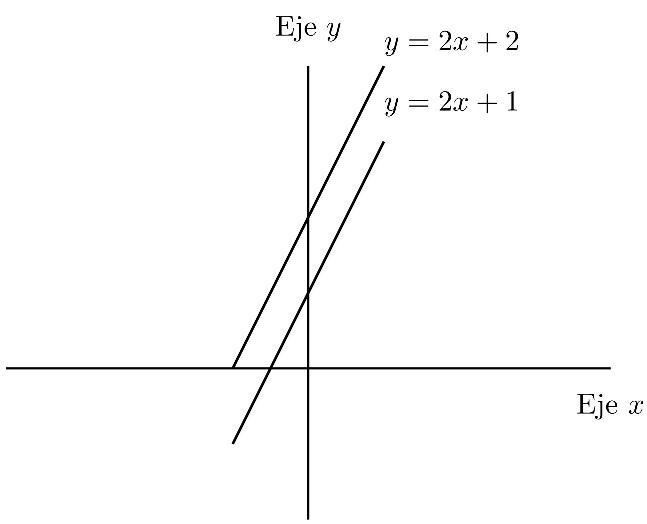


Figura 10: Rectas paralelas

Definición 4.1. *Si $L : y = a_Lx + b_L$ y $L' : y = a_{L'}x + b_{L'}$ son dos rectas. Diremos que L es paralela a L' en símbolos $L \parallel L'$. Si $a_L = a_{L'}$*

Ejemplo 4.1.1. *Determinemos la ecuación de la recta L que pasa por el punto P de intersección de las rectas $L' : y = 3x - 1$ y $L'' : y = -x + 5$ y que es paralela a la recta L''' que pasa por los puntos $Q = (1, 1)$ y $R = (-4, -1)$*

Etapa 1. Sea $L: y = ax + b$ la recta pedida

Etapa 2. Gestión de la información

En primer lugar, si $P = (x_0, y_0)$ entonces

$$\begin{aligned}
P \in L' \cap L'' &\iff P \in L' \wedge P \in L'' \\
&\iff y_0 = 3x_0 - 1 \quad \wedge \quad y_0 = -x_0 + 5 \\
&\implies \begin{array}{rcrcl} 3x_0 & - & 1 & = & y_0 \\ -x_0 & + & 5 & = & y_0 \\ \hline \end{array} \\
&\implies 4x_0 = 6 \\
&\implies x_0 = \frac{3}{2} \text{ e } y_0 = \frac{7}{2} \\
&\implies P = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)
\end{aligned}$$

Retornando a la Etapa 1, tenemos que

$$P \in L \iff \frac{7}{2} = \frac{3}{2}a + b \qquad (*)$$

En segundo lugar, si $L''': y = cx + d$ entonces

$$\left.\begin{array}{lcl} Q \in L''' & \iff & 1 = c + d \\ R \in L''' & \iff & -1 = -4c + d \end{array}\right\} \implies \begin{array}{rcrcr} c & + & d & = & 1 \\ -4c & + & d & = & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\implies 5c = 2 \\
&\implies c = \frac{2}{5} \wedge d = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Así que, $L''': y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$ y entonces por definición

$$L \parallel L''' \iff a = \frac{2}{5}$$

Finalmente, sustituyendo en $(*)$ tenemos que $b = \frac{29}{10}$ y $L: \quad y = \frac{2}{5}x + \frac{29}{10}$, y su gráfico es

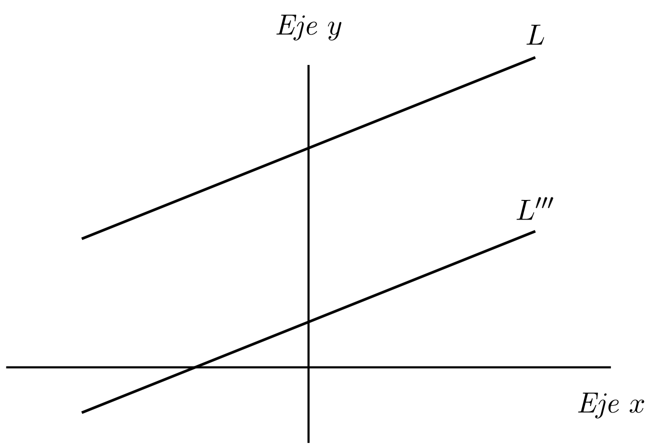


Figura 11: $L: \ y = \frac{2}{5}x + \frac{29}{10}$

5. Rectas Perpendiculares

Si graficamos las rectas $L : y = x + 1$ y $L' : y = -x + 1$ obtenemos la figura

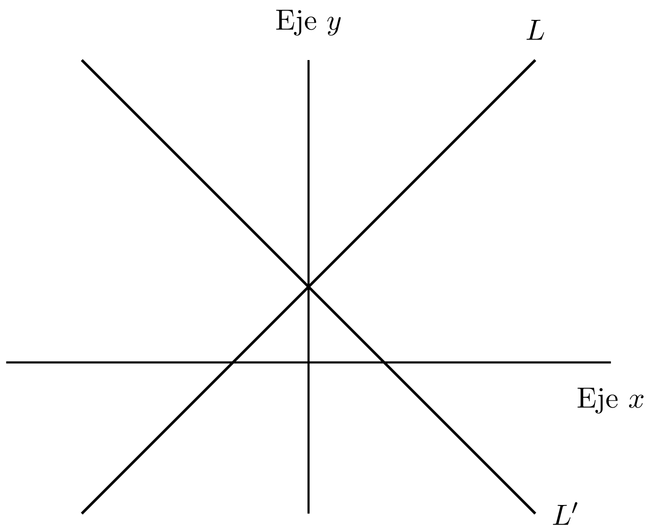


Figura 12: Rectas perpendiculares

Observamos que ambas rectas son perpendiculares y que $a_L \cdot a_{L'} = 1 \cdot (-1) = -1$. Esta es la situación general para este tipo de comportamiento, así que por ahora lo definiremos. Para una demostración de este hecho ver:

`http://palillo.usach.cl/apoyo_docente/perpendicularidad/perpendiculares.pdf`

Definición 5.1. *Si $L : y = a_L x + b_L$ y $L' : y = a_{L'} x + b_{L'}$ son dos rectas. Diremos que L es perpendicular a L' en símbolos $L \perp L'$. Si $a_L \cdot a_{L'} = -1$*

Ejemplo 5.1.1. *Determinemos la ecuación de la recta L que pasa por $P = (2, 3)$ y es perpendicular a la recta $y = 2x - 4$.*

Etapa 1. Sea $L \ : \ y = ax + b$ la recta pedida

Etapa 2. Gestión de la información
En primer lugar, $(2, 3) \in L \Longleftrightarrow 3 = 2a + b \qquad (*)$
En segundo lugar, por definición tenemos que $L \perp (y = 2x - 4) \Longleftrightarrow a \cdot 2 = -1 \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2}$
Sustituyendo en $(*)$, tenemos que $b = 4$ y $L : \ y = -\frac{1}{2}x + 4$

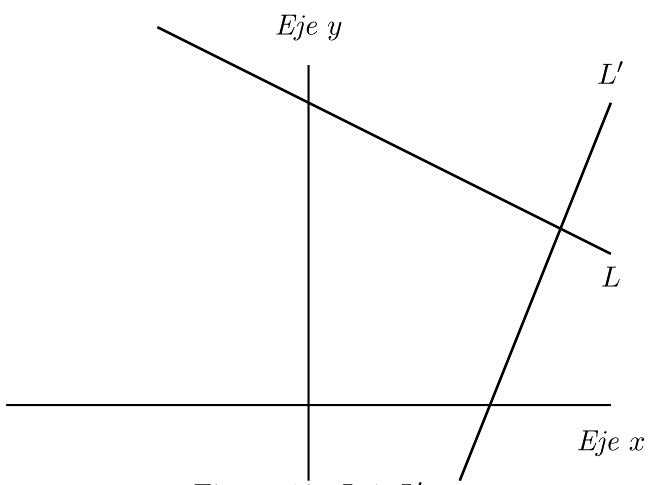


Figura 13: $L \perp L'$

6. Distancia de un punto a una recta

La idea aquí es calcular la distancia de un punto dado a una recta dada. Así que iniciamos el análisis considerando la situación geométrica:

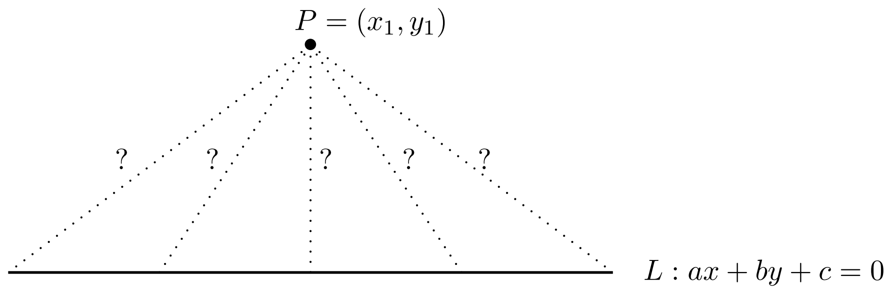


Figura 14: ¿Cuál es la distancia de un punto a una recta?

Llamaremos distancia del punto P a la recta L a la distancia $d(P, L) = d(P, Q)$ como en la figura

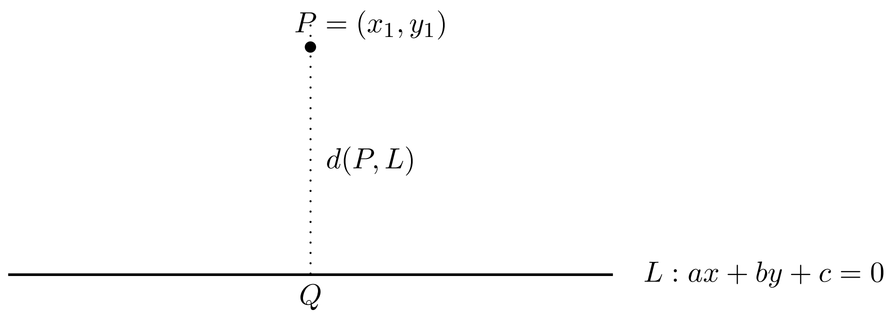


Figura 15: Distancia de un punto a un a recta

Usaremos la siguiente estrategia: Determinaremos esa distancia aplicando el concepto de perpendicularidad de rectas, en consecuencia.

Etapa 1. Determinamos la recta L' que pasa por P y es perpendicular a la recta L.

Como la pendiente de L es $m = -\dfrac{a}{b}$ entonces usando la ecuación punto pendiente (11) la ecuación de L' es

$$y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1) \quad \Longleftrightarrow \quad ay - bx + (bx_1 - ay_1) = 0$$

Etapa 2. Ahora intersectamos las rectas, L y L', y para ello debemos resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & c & = & 0 \\ ay & - & bx & + & (bx_1 - ay_1) & = & 0 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Y haciendo las cuentas, la solución del sistema (*) es $Q = \left(\dfrac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2 + b^2}, \dfrac{-abx_1 + a^2y_1 - bc}{a^2 + b^2} \right)$

Etapa 3. Finalmente calculamos la distancia de P a Q; es decir $d(P, Q)$.

$$
\begin{aligned}
(d(P,Q))^2 &= \left(\frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{a^2+b^2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{-abx_1 + a^2y_1 - bc}{a^2+b^2} - y_1\right)^2 \\
&= \left(\frac{b^2x_1 - aby_1 - ac - a^2x_1 - b^2x_1}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-abx_1 + a^2y_1 - bc - a^2y_1 - b^2y_1}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{-aby_1 - ac - a^2x_1}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-abx_1 - bc - b^2y_1}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{a(by_1 + c + ax_1)}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b(ax_1 + c + by_1)}{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= \frac{a^2(by_1 + c + ax_1)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2(ax_1 + c + by_1)^2}{(a^2+b^2)^2} \\
&= (a^2+b^2)\frac{(by_1 + c + ax_1)^2}{(a^2+b^2)^2} \\
&= \frac{(by_1 + c + ax_1)^2}{a^2+b^2}
\end{aligned}
$$

Definición 6.1. *La distancia de un punto $P = (x_1, y_1)$ a la recta $L \ : \ ax + by + c = 0$ es dada por*

$$
d(P,L) \quad = \quad \sqrt{\frac{(by_1 + c + ax_1)^2}{a^2+b^2}} \tag{12}
$$

Ejemplo 6.1.1. *Una compañía de arriendo de autos cobra una cantidad fija más una cantidad por kilómetro. Si el arriendo de un auto el lunes costó 70 dólares por recorrer 100 kilómetros y el jueves costó 120 dólares por recorrer 350 kilómetros. ¿ cuál es la función lineal que la compañía utiliza para cobrar sus cargos diarios.?*

Solución

Etapa 1. Sea $L \ : \ y = ax + b$ la función lineal pedida, donde x representa los kilómetros e y el precio

Etapa 2. Procedemos a evaluar L para determinar a y b

$$
\begin{aligned}
(100,70) \in L \wedge (350,120) \in L \quad &\Longleftrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcrcr} 100a & + & b & = & 70 \\ 350a & + & b & = & 120 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow \quad 250a = 50 \\
&\Longrightarrow \quad a = \frac{50}{250} \\
&\Longrightarrow \quad a = 0.2 \wedge b = 50
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
l(x) \quad = \quad 0.2x + 50
$$

La conclusión es que la compañía cobra una cuota de 50 dólares de cargo fijo, más 0.2 dólares por kilómetro.

Etapa 3. El gráfico de la solución es,

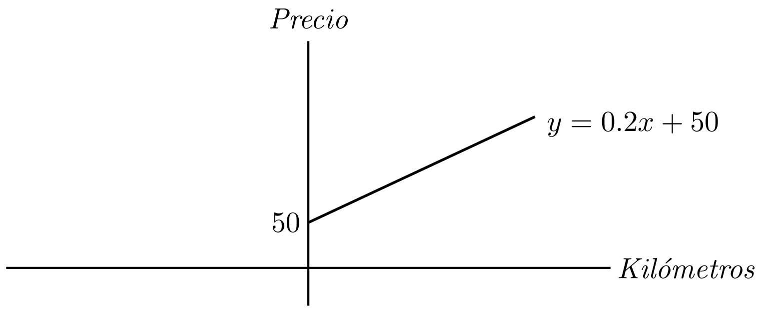


Figura 16: $y = 0.2x + 50$

Supongamos ahora, que existe otra compañía cuya función de cobro es dada por la fórmula $y = 0.3x + 25$*, es decir tiene un cobro fijo de 25 dólares y 0.3 dólares por kilómetro. ¿ Cuál de las dos empresas es más conveniente para usted.?*

En este caso la situación geométrica es la siguiente.

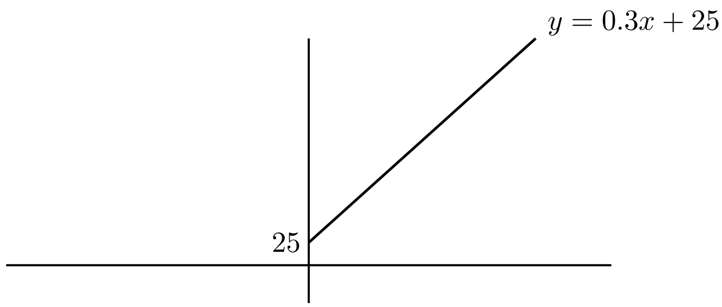


Figura 17: $y = 0.3x + 25$

Comparando ambas situaciones tenemos

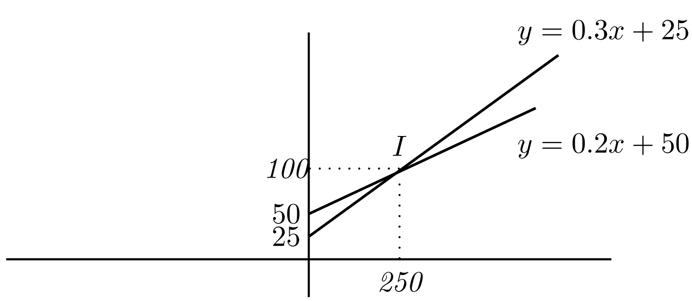


Figura 18: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0.3x + 25\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0.3x + 25\}$

Como se ve en la figura el punto de intersección $I = (250, 100)$ *el cual puede ser calculado vía un sistema de ecuaciones. La interpretación del punto de equilibrio es:* **"Para viajes de menos de 250 kilómetros debe usarse la segunda compañía y para viajes de más de 250 kilómetros debe usarse la primera"**

7. Ejercicios Propuestos

(1) Determine la ecuación general de la recta dados los siguientes datos

(a) $P = (1, 2)$ y $Q = (-2, 4)$

(b) $P = (0, 0)$ y $Q = (3, 3)$

(c) $P = (1, 2)$ y $a = 5$ (a es la pendiente)

(d) $P = (2, -3)$ y $a = -2$

(e) Intersecta al eje x en (4,0) y al eje y en (0,-2)

(2) Demuestre que los puntos son los vértices de la figura que se indica:

(a) $P = (-3, 1)$; $Q = (5, 3)$; $R = (3, 0)$;$S = (-5, -2)$ Paralelogramo

(b) $P = (6, 15)$; $Q = (11, 12)$; $R = (-1, -8)$;$S = (-6, -5)$ Rectángulo

(c) $P = (-3, 0)$; $Q = (3, 0)$; $R = (8, 0)$ Triángulo

(3) Determina la ecuación general de la recta dadas los siguientes condiciones

(a) $P = (1, 1)$ y es paralela a la recta $2x + 3y - 5 = 0$

(b) $P = (0, 4)$ y es perpendicular a la recta $3x - 2y + 5 = 0$

(c) Pasa por la intersección de las rectas $2x + 7y + 4 = 0$ y $4x - 3y + 5 = 0$ y es paralela a la recta $5x - 2y - 9 = 0$.

(d) Es paralela a eje x y pasa por $P = (7, 3)$

(4) Un bebé pesa 5 kilos al nacer y siete años después pesa 28 kilos. Suponga que el peso P en kilos esta relacionado linealmente con la edad t en años.

(a) Determine P en términos de t.

(b) ¿Cuál será el peso del joven cuando tenga la edad de 18 años?.

(c) ¿A qué edad pesará 82 kilos?.

(5) Una compañía de arriendo de autos cobra una cantidad fija por día más un adicional por kilómetros. Si al rentar un carro un día se paga 80 dólares por 200 kilómetros y otro día se pagó 117,5 dólares por 350 dólares. Determine la función lineal que rige el cobro diario de la compañía.

8. Función Cuadrática

Definición 8.1. *Una función se llamará función cuadrática sobre $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$, si existen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$q(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}) \tag{13}$$

Si $\mathbb{U} = \mathbb{R}$ entonces $q(x) = ax^2 + bx + c$, se llama función cuadrática.

Ejemplo 8.1.1. $q(x) = x^2$

Ejemplo 8.1.2. $q(x) = 2x^2 + 4x - 5$

Ejemplo 8.1.3. $q(x) = -x^2 + 1$

Ejemplo 8.1.4. $q(x) = x^2 + 3x - 6$

(1) Si $q(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}$ es una función cuadrática entonces para determinar la función completamente basta con conocer el dominio $\mathbb{U}$, a, b y c

(2) Consideremos la "función cuadrática básica o más simple" $q(x) = x^2$

(a) Su gráfico como se ve fácilmente es definido por el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\} = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{U} \subseteq R\} \tag{14}$$

Y es de la forma,

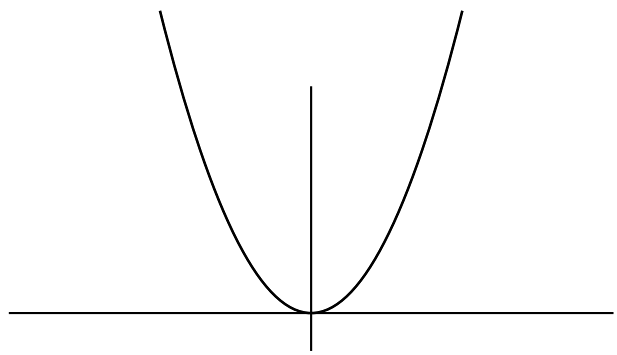


Figura 19: $y = x^2$

(b) Análogamente para $q(x) = -x^2$ tenemos que su gráfico es del tipo

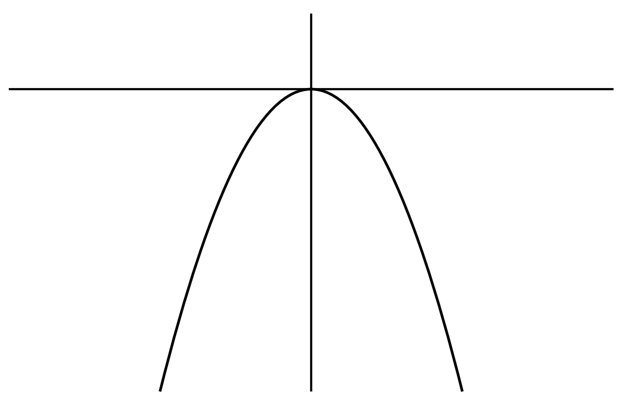


Figura 20: $y = -x^2$

(c) De sus gráficos y de los cálculos directos sigue que:

$$q(-x) = q(x) \qquad \text{simetría respecto del eje y} \tag{15}$$

En primer lugar observamos que como $a \in \mathbb{R}$ entonces $a = 0$ o $a \neq 0$. Así que

Si $a = 0$ entonces $q(x) = bx + c$ es una función lineal, ya estudiada.

Ahora si, $a \neq 0$ entonces

$$
\begin{aligned}
q(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
q(x) = ax^2 + bx + c \iff q(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) \tag{16}
$$

De la fórmula obtenida podemos observar los siguientes hechos,

(1) $q\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \left(\dfrac{4ac - b^2}{4a}\right) \Longrightarrow \left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right) \in graf(q)$

(2) Respecto de la imagen o recorrido de q

$$
\begin{aligned}
y \in Img(q) &\iff y = ax^2 + bx + c \quad (\text{para algún } x \in \mathbb{R}) \\
&\iff ax^2 + bx + (c - y) = 0 \\
&\Longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y)}}{2a} \\
&\Longrightarrow b^2 - 4a(c - y) \geq 0 \\
&\Longrightarrow b^2 \geq 4a(c - y) \\
&\Longrightarrow b^2 \geq 4ac - 4ay \\
&\Longrightarrow 4ay \geq 4ac - b^2 \\
&\Longrightarrow ay \geq \frac{4ac - b^2}{4}
\end{aligned}
$$

(a) Si $a > 0$ entonces $y \geq \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ y $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ es un mínimo y la parábola abre hacia arriba.

(b) Si $a < 0$ entonces $y \leq \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ y $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ es un máximo y la parábola abre hacia abajo.

(3) En particular, como $ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Sigue que

(a) Si $b^2-4ac \geq 0$ entonces la parábola intersecta al eje x en a lo más dos puntos a saber:

(i) $b^2-4ac > 0 \Longrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ii) $b^2-4ac = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{-b}{2a}$

(b) Si $b^2-4ac < 0$ entonces la parábola no intersecta al eje x.

Definición 8.2. *Si $q(x) = ax^2+bx+c$ es una función cuadrática entonces al punto $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ lo llamaremos el vértice de la parábola y a la recta $x = -\dfrac{b}{2a}$ la llamaremos eje de simetría de la parábola.*

(4) Finalmente los gráficos posibles para una función cuadrática son:

(i) Caso : $a > 0 \wedge (b^2-4ac) > 0$

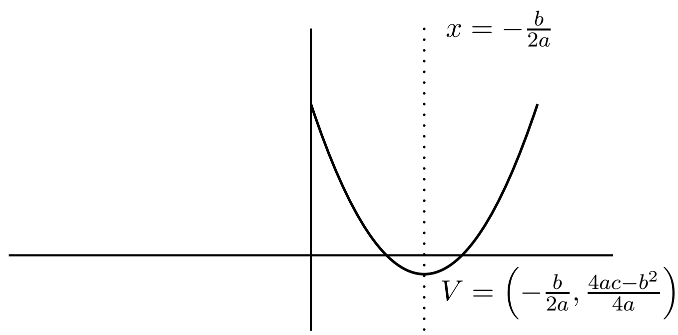


Figura 21: $a > 0 \wedge (b^2-4ac) > 0$

(ii) Caso : $a > 0 \wedge (b^2-4ac) = 0$

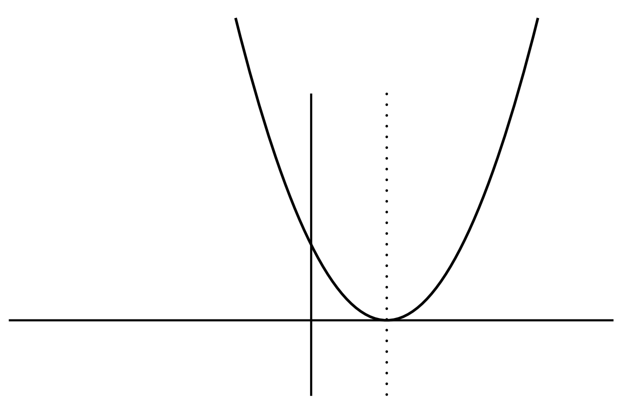


Figura 22: $a > 0 \wedge (b^2-4ac) = 0$

(iii) Caso : $a > 0 \wedge (b^2 - 4ac) < 0$

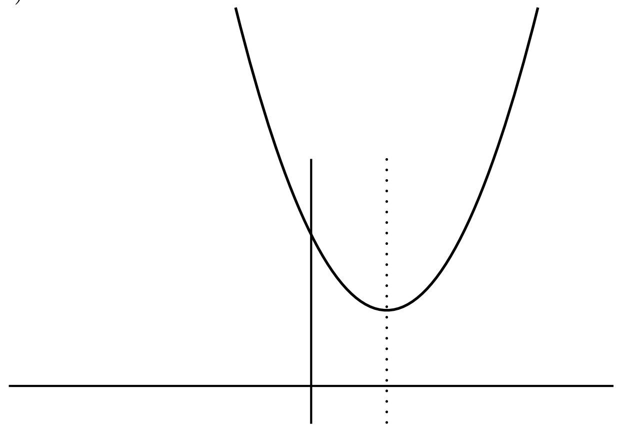


Figura 23: $a > 0 \wedge (b^2 - 4ac) < 0$

(i') Caso : $a < 0 \wedge (b^2 - 4ac) > 0$

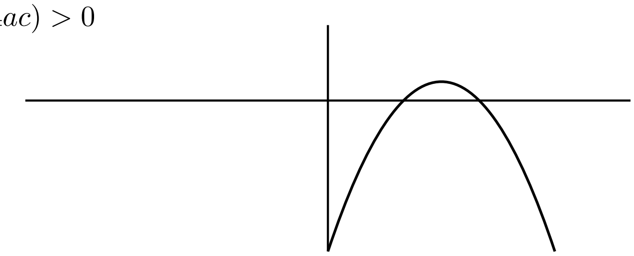


Figura 24: $a < 0 \wedge (b^2 - 4ac) > 0$

(ii') Caso : $a < 0 \wedge (b^2 - 4ac) = 0$

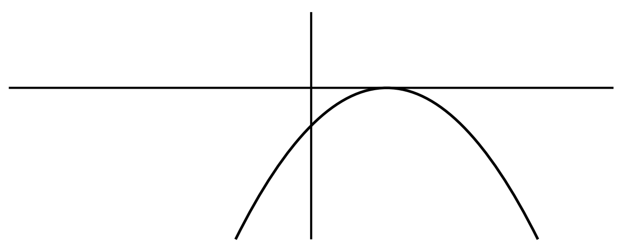


Figura 25: $a < 0 \wedge (b^2 - 4ac) = 0$

(iii') Caso : $a < 0 \wedge (b^2 - 4ac) < 0$

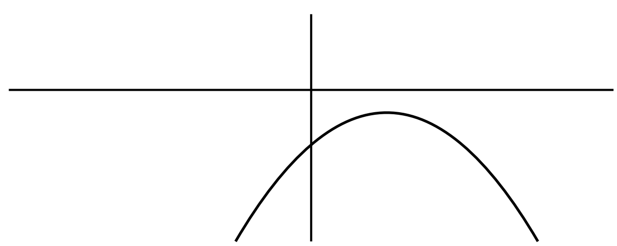


Figura 26: $a < 0 \wedge (b^2 - 4ac) < 0$

Ejemplo 8.2.1. *Si* $q(x) = x^2 - 4x + 3$ *entonces*

(1) $a = 1$, *luego la parábola abre hacia arriba.*

(2) $b^2 - 4ac = 4 > 0$, *luego la parábola intersecta al eje* x *en dos puntos, a saber:*

$$P_1 = (\frac{4-2}{2}, 0) = (1, 0) \quad \wedge \quad P_2 = (\frac{4+2}{2}, 0) = (3, 0)$$

(3) *El vértice de la parábola es:* $V = \left(-\frac{-4}{2}, \frac{-4}{4}\right) = (2, -1)$

(4) *Así que su gráfico es del tipo:*

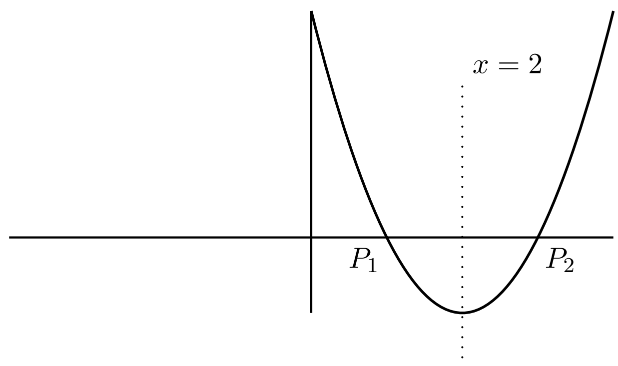


Figura 27: $q(x) = x^2 - 4x + 3$

9. Relaciones Algebraicas en el Plano: El circulo

Llamaremos un **Lugar Geométrico**[1] al conjunto de puntos del plano que satisface una condición geométrica.

Iniciaremos nuestro estudio. analizando el Lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo dado en el plano.

Etapa 1 Sea $O = (h, k)$ el punto fijo dado en el plano y llamemos C al lugar geométrico pedido.

Etapa 2. Traducimos el español a la matemática!!:

- Equidistar significa estar a la misma distancia, así que los elementos de O se encuentran todos a la distancia r del punto centro C
- Luego, $Q \in C \Longleftrightarrow d(Q, O) = r$
- Finalmente,

$$C = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid d(Q, O) = r\} \tag{17}$$

[1] Toda curva de segundo grado puede ser considerada como el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo, llamado foco y a una recta fija, llamada directriz están en una relación constante, llamada excentricidad.

Etapa 3. Caracterizamos y graficamos el lugar geométrico C

$$
\begin{aligned}
Q \in C &\iff Q \in \mathbb{R}^2 \wedge d(Q, O) = r \\
&\iff Q = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \\
&\iff Q = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2
\end{aligned}
$$

Etapa 4. Su gráfico es el siguiente:

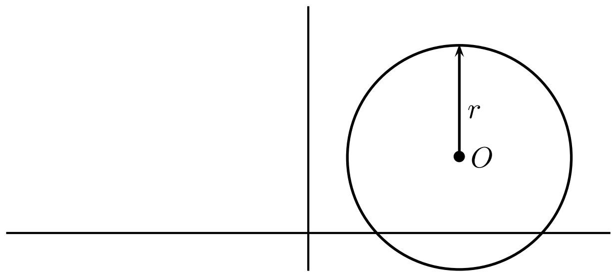


Figura 28: $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$

Definición 9.1. *El lugar geométrico definido encima se llama circulo de centro en $O = (h, k)$ y radio r. Y lo notaremos por su ecuación canónica:*

$$
C \ : \ (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{18}
$$

Observación 9.1.1. *Si consideramos la relación particular $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ entonces podemos hacer lo siguiente:*

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 4x - 6y - 9 = 0 &\iff (x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + 9 = 0 \\
&\iff \left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + \\
&\qquad \left(y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) = -9 \\
&\iff (x^2 + 4x + (2)^2 - 4) + (y^2 - 6y + (3)^2 - 9) = -9 \\
&\iff (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 = -9 \\
&\iff (x+2)^2 + (y-3)^2 = -9 + 13 \\
&\iff (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 \\
&\iff (x-(-2))^2 + (y-3))^2 = 4
\end{aligned}
$$

Luego, la ecuación representa a un círculo de centro $O = (-2, 3)$ y radio $r^2 = 4$, equivalentemente $r = \sqrt{4} = 2$

Su diseño es de la forma:

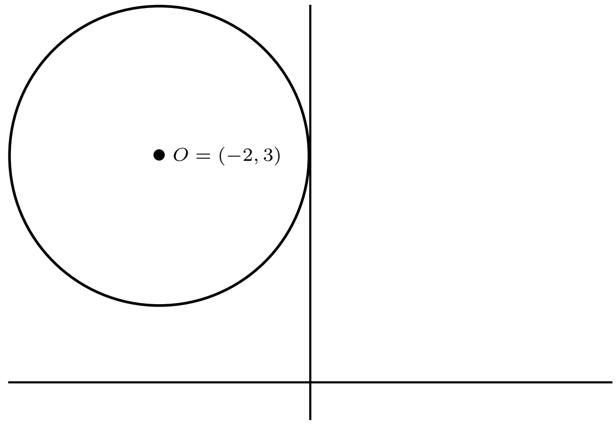


Figura 29: $C : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0\}$

En general si consideramos una relación del tipo, $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 &\iff (x^2 + ax) + (y^2 + by) = -c \\
&\iff x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + by + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c \\
&\iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c \\
&\iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ representa un círculo si

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 > c \text{ y su radio es } O = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

9.2. Ejercicios Propuestos.

(1) Escriba las ecuaciones canónica y general de los círculos. Además grafique cada círculo.

   (a) $O : (3, 5)$ y $r = 2$

   (b) $O : (-1, 1)$ y $r = 3$

   (c) $O : (0, 0)$ y $r = 1$

   (d) $O : (-3, -1)$ y $r = \sqrt{2}$

   (e) $O : (2, -1)$ y $r = 2\sqrt{3}$

   (f) $O : (3, 3)$ y $r = 4$

   (g) $O : (0, -2)$ y $r = 3\sqrt{2}$

(2) Determine el centro, el radio y grafique cada uno de los círculos:

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$

(b) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$

(c) $3x^2 + 3y^2 - 30x + 6y + 3 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

(e) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 32y + 33 = 0$

(f) $6x + 12y + 40 - 9x^2 - 9y^2 = 0$

(g) $x^2 + y^2 = 0$

(3) Determine la ecuación del círculo con centro en el origen y que pasa por el punto $P = (1, \sqrt{3})$

(4) Determine la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P = (1, 2)$, $Q = (4, 3)$ y $R = (2, -3)$

(5) Determine la ecuación de la recta L, que es tangente al círculo de ecuación $C \; : \; x^2 + y^2 = 25$, en el punto $P = (3, 4)$. Grafique C y L

(6) Determine la ecuación del círculo que pasa por el punto $P = (1, -1)$ y su centro es el punto de intersección de las rectas, $x + y - 1 = 0$ y $2x + 3y + 2 = 0$. Grafique el círculo y las rectas.

10. Relaciones Algebraicas en el Plano: La Elipse

Ahora pasamos a estudiar el Lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos es igual a una constante y esa constante es mayor que el largo del segmento $\overline{F_1F_2}$

Etapa 1. Sean $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$ los focos fijos tales que $\overline{F_1F_2} < 2a$, y que el centro del lugar geométrico es en $C = (0, 0)$, y llamemos E al lugar geométrico pedido.

Etapa 2. Traducimos el español a la matemática!!:

- $Q \in E \Longleftrightarrow d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$

- Así que,

$$E \; : \; d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a \qquad (*)$$

- Ahora buscamos otra relación entre $d(Q, F_1)$ y $d(Q, F_2)$

$$\left.\begin{array}{rcl} d(Q, F_1)^2 & = & (x + c)^2 + y^2 \\ d(Q, F_2)^2 & = & (x - c)^2 + y^2 \end{array}\right\} \begin{array}{cl} \Longrightarrow & d(Q, F_1)^2 - d(Q, F_2)^2 = (x + c)^2 - (x - c)^2 \\ \Longleftrightarrow & d(Q, F_1)^2 - d(Q, F_2)^2 = 4xc \\ \Longleftrightarrow & (d(Q, F_1) - d(Q, F_2))(d(Q, F_1) + d(Q, F_2)) = 4xc \\ \Longleftrightarrow & (d(Q, F_1) - d(Q, F_2))2a = 4xc \\ \Longleftrightarrow & d(Q, F_1) - d(Q, F_2) = \dfrac{2xc}{a} \qquad (**) \end{array}$$

- Con $(*)$ y $(**)$ formamos un sistema de ecuaciones,

$$\begin{array}{rcl|} d(Q,F_1)+d(Q,F_2) & = & 2a \\ d(Q,F_1)-d(Q,F_2) & = & \dfrac{2xc}{a} \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} d(Q,F_1)=a+\dfrac{cx}{a} & \text{: sumando,} \\ d(Q,F_2)=a-\dfrac{cx}{a} & \text{: restando.} \end{cases}$$

- Sustituyendo en $d(Q,F_1)^2$ y $d(Q,F_2)^2$ tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \left(a+\dfrac{cx}{a}\right)^2 & = & (x+c)^2+y^2 \\ & \Updownarrow & \\ a^2+2cx+\dfrac{c^2x^2}{a^2} & = & x^2+2cx+c^2+y^2 \\ & \Updownarrow & \\ a^4+c^2x^2 & = & a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 \\ & \Updownarrow & \\ a^2y^2-c^2x^2+a^2x^2 & = & a^4-a^2c^2 \\ & \Updownarrow & \\ (a^2-c^2)x^2+a^2y^2 & = & (a^2-c^2)a^2 \end{array}$$

Como $a^2>c^2$ entonces $(a^2-c^2)>0$ y como $a^2-c^2=(\sqrt{(a^2-c^2)})^2$ entonces podemos llamar $b^2=a^2-c^2$ y tenemos la ecuación

$$E \quad : \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{19}$$

Etapa 3. Finalmente caracterizamos el lugar geométrico E

$$\begin{aligned} Q\in E \quad &\Longleftrightarrow \quad Q\in\mathbb{R}^2\wedge d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=2a \\ &\Longleftrightarrow \quad Q=(x,y)\in\mathbb{R}^2\wedge\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{aligned} \tag{20}$$

Etapa 4. Su gráfico es el siguiente:

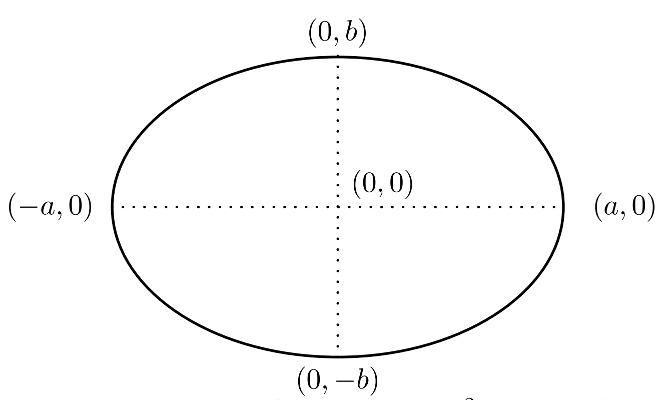


Figura 30: $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$

Definición 10.1. *El lugar geométrico definido encima se llama elipse de centro en $O = (0,0)$. Y lo notaremos por su ecuación canónica:*

$$E \quad : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{21}$$

10.2. Elementos de una elipse. Consideremos una elipse con centro en $C = (h,k)$, según la figura

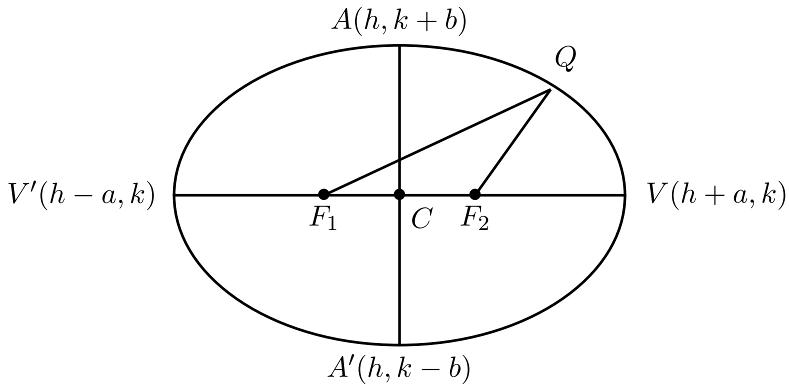


Figura 31: Eje focal paralelo al eje x

Distinguiremos los siguientes elementos básicos:

Centro de la elipse	:	C=(h,k)
Eje mayor (focal)	:	$\overline{VV'}$
Eje menor	:	$\overline{AA'}$
$Focos$	:	$F_1 = (-c,k);\ F_2 = (c,k)$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
$d(V', V)$	:	$2a$
$d(A, A')$	:	$2b$
$d(C, F_1) = d(C, F_2)$	:	$c < a$
Excentricidad	:	$e = \frac{c}{a}$

De acuerdo a la posición del eje mayor tenemos dos ecuaciones que llamaremos Ecuaciones canónicas:

Definición 10.3. *La elipse con centro en $C = (h,k)$ y eje mayor paralelo al eje x tiene la ecuación canónica:*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{22}$$

Su gráfico es de la forma de la figura: 31

Análogamente, la elipse con centro en $C = (h,k)$ y eje mayor paralelo al eje *y tiene la ecuación canónica:*

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \tag{23}$$

Y su gráfico es de la forma

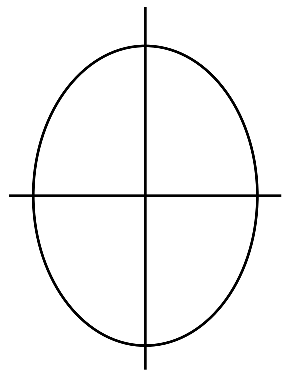


Figura 32: Eje focal paralelo al eje y

Ejemplo 10.3.1. *Grafiquemos la cónica* $2x^2+y^2-4x+4y+4=0$.

Etapa 1. Completamos cuadrados.

$$\begin{aligned}
2x^2+y^2-4x+4y+4=0 &\iff 2x^2-4x+y^2+4y+4=0\\
&\iff 2(x^2-2x+1-1)+(y^2+4y+4-4)+4=0\\
&\iff 2(x-1)^2-2+(y+2)^2=0\\
&\iff 2(x-1)^2+(y+2)^2=2\\
&\iff (x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{2}=1
\end{aligned}$$

Luego la cónica es una elipse con centro en el punto $C=(1,-2)$.

Etapa 2. Graficamos la elipse:

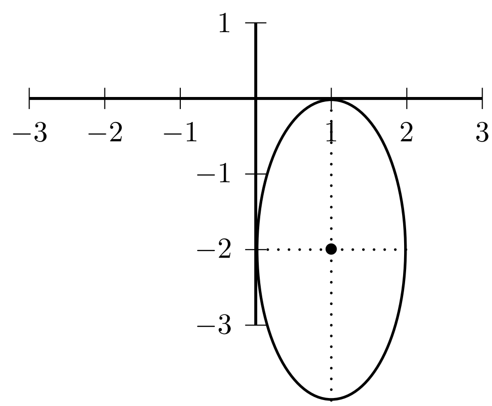


Figura 33: $E:\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+\dfrac{(y+2)^2}{2}=1\right\}$

10.4. Ejercicios Propuestos.

(1) Determine la ecuación canónica y general de las elipses y grafiquelas:

(a) $V = (\pm 5, 0)$ y $A = (0, \pm 3)$

(b) Focos en $(-2, 1)$ y $(4, 1)$ y eje mayor 10

(c) Focos en $(-3, 0)$ y $(-3, 4)$ y eje menor 6

(d) Centro en $(1, -2)$, eje horizontal 8 y excentricidad $e = \dfrac{3}{4}$

(e) Focos en $(-2, 2)$ y $(4, 2)$ y excentricidad $e = \dfrac{1}{3}$

(2) Grafique y determine los elementos de las elipses:

(a) $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

(b) $12x^2 + y^2 - 36 = 0$

(c) $x^2 + 8x + 9y^2 + 36y + 16 = 0$

(d) $4x^2 - 24x + y^2 + 4y + 24 = 0$

(e) $9x^2 - 36x + 4y^2 - 24y + 36 = 0$

(3) Demuestre que la recta tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en $P = (x_0, y_0)$ tiene como ecuación:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{24}$$

(4) La órbita de la tierra es un elipse, con el sol en uno de sus focos. La distancia máxima del planeta al sol es de 94.56 millones de millas y la mínima es de 91.45 millones de millas. ¿ Cuáles son los semiejes menor y mayor de la órbita terrestre y cuál es su excentricidad ?

11. Relaciones Algebraicas en el Plano: La Hipérbola

Llamaremos Hipérbola al lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados focos es igual a una constante y esa constante es menor que el largo del segmento $\overline{F_1F_2}$

Definición 11.1. *La hipérbola con centro en $C = (h, k)$ y eje mayor paralelo al eje x tiene la ecuación canónica:*

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{25}$$

Análogamente la hipérbola con centro en $C = (h, k)$ y eje mayor paralelo al eje y tiene la ecuación canónica:

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1 \tag{26}$$

Sus gráficos son de la forma:

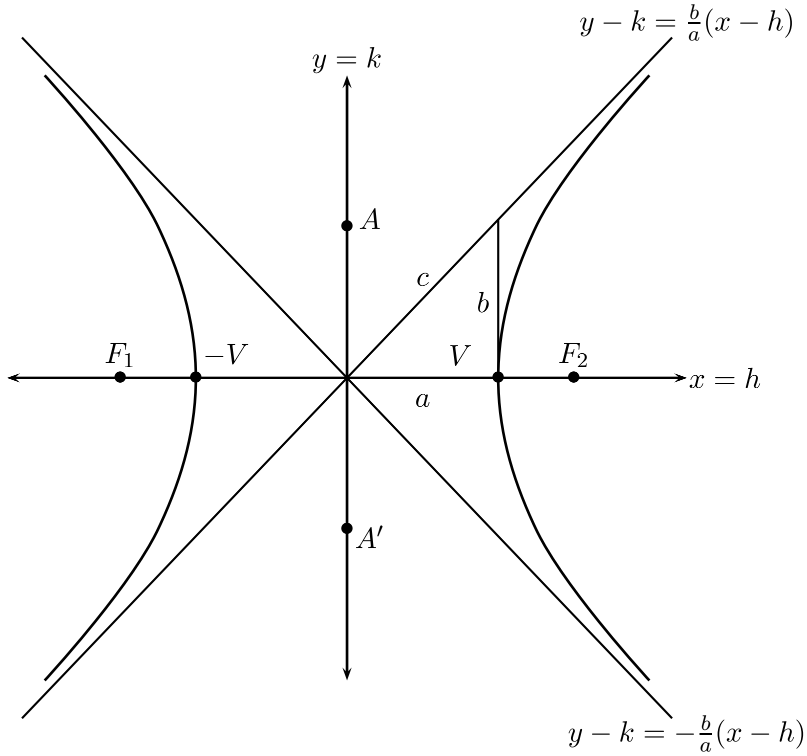


Figura 34: Eje focal paralelo al eje x

O bien de la forma:

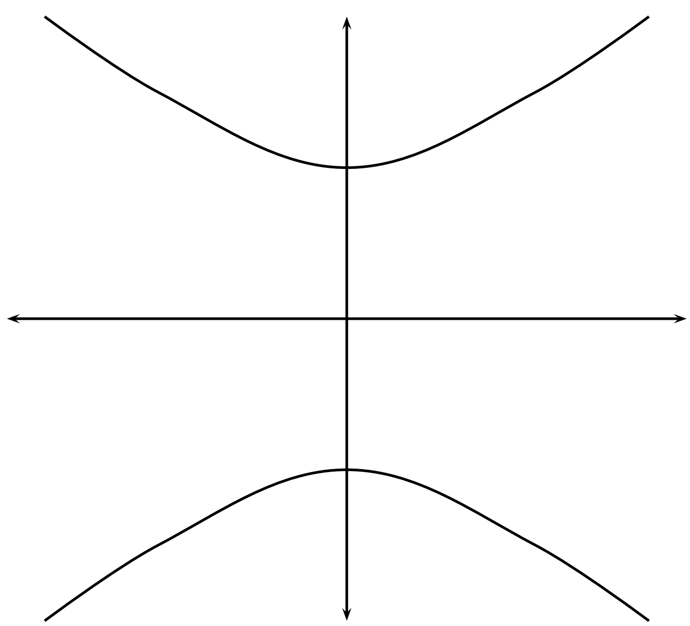


Figura 35: Eje focal paralelo al eje y

Los elementos básicos de una hipérbola son:

Centro	:	$C = (h, k)$
Eje transversal	:	$\overline{VV'}$
Eje conjugado	:	$\overline{AA'}$
Focos	:	$F_1 = (-c, k); F_2 = (c, k)$ (eje transversal paralelo eje x)
$d(V, V')$	:	$2a$
$d(A, A')$	:	$2b$
Directrices	:	$y = \frac{a^2}{c};\ y = -\frac{a^2}{c}$
Excentricidad	:	$y = \frac{c}{a}$

Ejemplo 11.1.1. *Identifiquemos la sección cónica:* $9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0$

Si completamos los cuadrados.

$$\begin{aligned} 9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0 &\iff 9(x-2)^2 - 4(y-1)^2 = 36 \\ &\iff \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1. \end{aligned}$$

Concluimos que la cónica es una hipérbola con centro en el punto $C = (2, 1)$.

11.2. Ejercicios Propuestos.

(1) Determine la ecuación canónica y general de las hipérbolas y grafiquelas si:

(a) Focos en $(\pm 4, 0)$ y vértices en $(\pm 1, 0)$
(b) Focos en $(0, \pm 3)$ y vértices en $(0, \pm 2)$
(c) Vértices en $(\pm 3, 0)$ y excentricidad $\frac{5}{3}$
(d) Vértices en $(\pm 4, 0)$ y pasa por el punto $(8, 3)$
(e) Centro $(2, 2)$, eje transverso horizontal de longitud 6 y excentricidad 2
(f) Centro $(-1, 3)$, vértices en $(-4, 3)$ y $(2, 3)$ y focos en $(-6, 3)$ y $(4, 3)$

(2) Grafique y determine los elementos de las hipérbolas:

(a) $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$
(b) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$
(c) $4y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 41 = 0$
(d) $x^2 + 4x - 9y^2 + 54y - 113 = 0$
(e) $-4x^2 + 24x + 16y^2 + 64y - 36 = 0$

(3) Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $P = (x_0, y_0)$ es de la forma $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

12. Relaciones Algebraicas en el Plano: La parábola

Definición 12.1. *La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya distancia a una recta fija (directriz) es igual a la distancia a un punto fijo (foco).*

Estudiemos los gráficos posibles de la parábola de acuerdo a estas condiciones:

(1) Eje focal paralelo al eje y

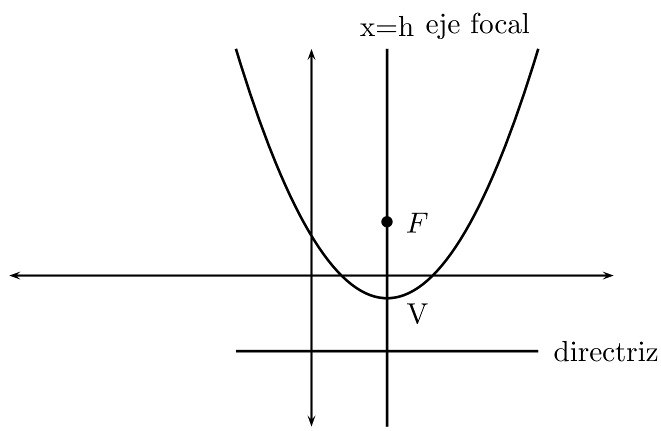


Figura 36: Eje focal paralelo al eje y

En este caso, la ecuación canónica de la parábola con vértice $V(h,k)$ y foco $F(h,p+k)$; $p>0$ y directriz $y=-p+k$ es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \tag{27}$$

(2) Eje focal paralelo al eje x

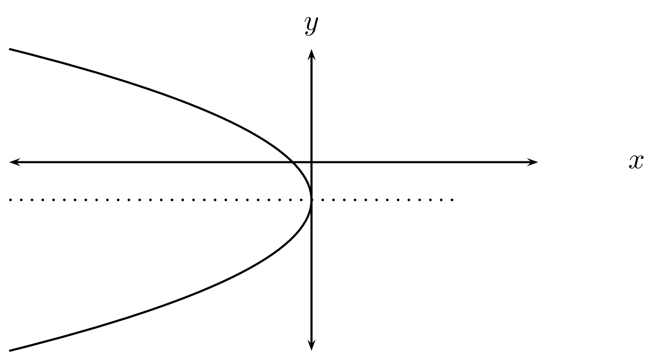


Figura 37: Eje focal paralelo al eje x

En este otro caso, la ecuación canónica de la parábola es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \tag{28}$$

Ejemplo 12.1.1. *Determinemos la ecuación canónica y grafiquemos la cónica* $x^2 - 2x - 4y + 13 = 0$

Etapa 1. Si completamos el cuadrado posible

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4y - 3 = 0 &\iff (x^2 - 2x) = 4y + 3 \\ &\iff \left(x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right) = 4y + 3 \\ &\iff (x-1)^2 - 1 = 4y + 3 \\ &\iff (x-1)^2 = 4y + 4 \\ &\iff (x-1)^2 = 4(y+1) \end{aligned}$$

Obtenemos que la cónica es una parábola con vértice en el punto $V = (1, -1)$*, y para calcular su foco;*

$$4p = 4 \implies p = 1$$

Así que la parábola abre hacia arriba, pues su foco es $F = (1, 0)$

Etapa 2. Su gráfico es de la forma

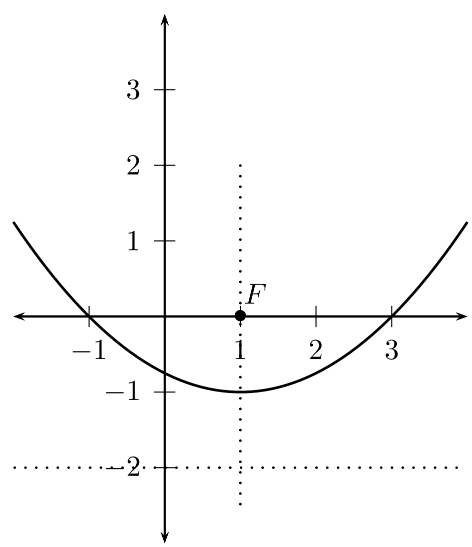


Figura 38: $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 = 4(y+1)\}$

12.2. Ejercicios Propuestos.

(1) Determine la ecuación canónica y general de las parábolas si:

   (a) Vértice en $(0, 0)$ y foco en $(3, 0)$

   (b) Vértice en $(2, 3)$ y foco en $(2, 1)$

   (c) Vértice en $(-1, -1)$ y foco en $(-3, -1)$

(d) Foco en $(1,2)$ y directriz en $x = -1$

(e) Foco en $(-2,1)$ y directriz en $x = -4$

(f) Foco en $(0,-3)$ y directriz en $y = -2$

(2) Grafique y determine los elementos de las parábolas:

(a) $y^2 - 12x = 0$

(b) $x^2 - 4x - 4y = 0$

(c) $4x^2 + 4x + 4y + 13 = 0$

(d) $4y^2 12y + 9x = 0$

(3) Demuestre que el punto de la parábola $y^2 = 4px$ más cercano al foco es el vértice

(4) Demuestre que la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto $P = (x_0, y_0)$ es

$$2px - y_o y + 2px_0 = 0$$

Algunas Transformaciones en el Plano Cartesiano

El trabajo solidario es lo único que hace humano al ser humano

1. Rotaciones en el plano

Definición 1.1. *Llamaremos Rotación en un ángulo θ a la función.*

$$R(\theta) : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \textit{ definida por } R(\theta)(x, y) \;=\; (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$$

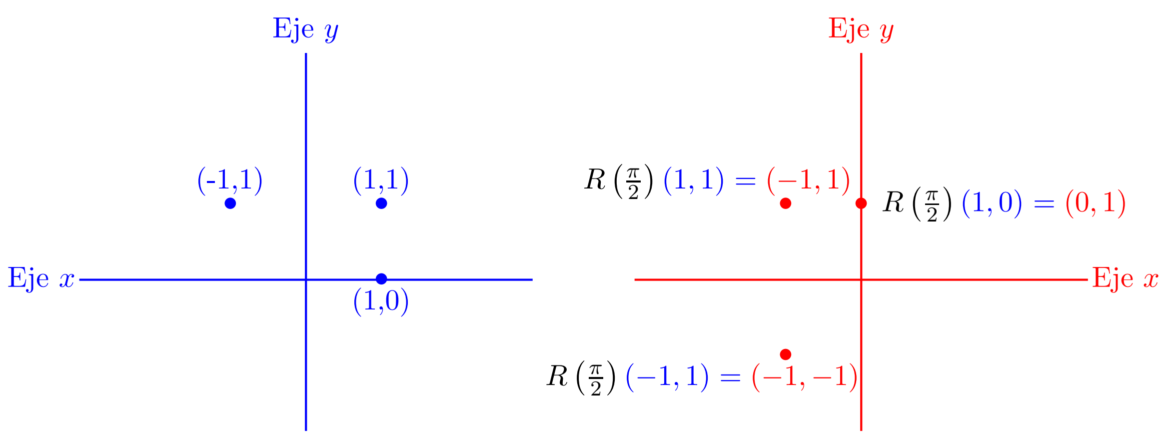
A seguir, estudiaremos con detalles, algunos ángulos particulares para ejemplificar el comportamiento de esta función.

1.2. Rotación del plano $\mathbb{R}^2$ para $\theta = \frac{\pi}{2}$, es decir 90°.

♦ En este caso, $R\left(\frac{\pi}{2}\right)(x, y) = (x\cos(\frac{\pi}{2}) - y\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}), x\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) + y\cos(\frac{\pi}{2})) = (-y, x)$, y por ejemplo:

$$\begin{aligned} R\left(\tfrac{\pi}{2}\right)(1, 0) &= (0, 1) \\ R\left(\tfrac{\pi}{2}\right)(1, 1) &= (-1, 1) \\ R\left(\tfrac{\pi}{2}\right)(-1, 1) &= (-1, -1) \end{aligned}$$

♦ La situación geométrica para estos puntos se presenta así:



♦ Podemos extender esta idea a las rectas, como sigue:

Si $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b; a \neq 0\}$ entonces por una parte,

$$(x,y)\in L \iff (x,y)\in\mathbb{R}^2\wedge y=ax+b \iff (x,ax+b)\wedge x\in\mathbb{R}$$

Y por otra,

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right)(x,ax+b) = (-ax-b,x)\in L'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=-\frac{1}{a}\,x-\frac{b}{a}\right\}$$

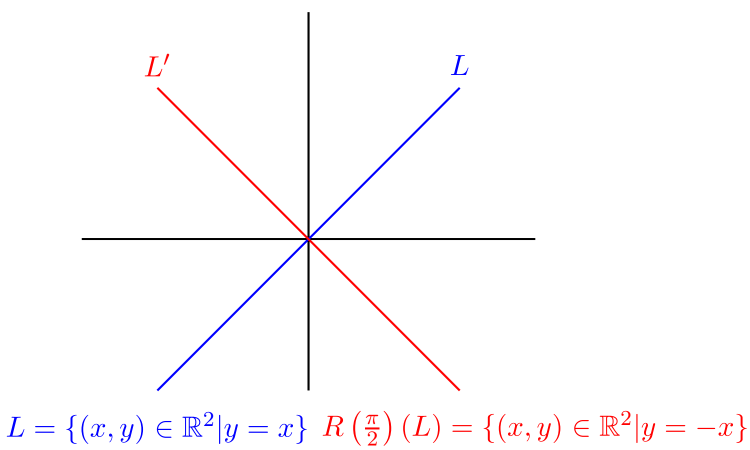
En efecto,

$$-\frac{1}{a}\,(-ax-b)-\frac{b}{a}=x+\frac{b}{a}-\frac{b}{a}=x$$

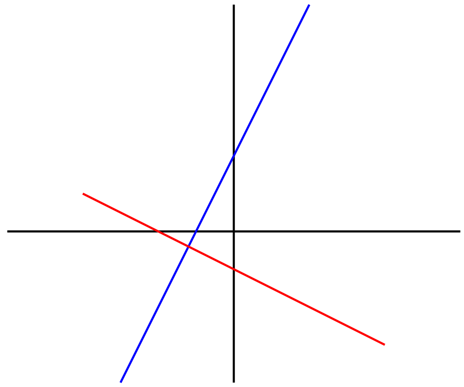
Conclusión 1.2.1. $L\perp R\left(\frac{\pi}{2}\right)(L)$. *Pues*

$$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=ax+b; a\neq 0\}\iff R\left(\frac{\pi}{2}\right)(L)=L'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=-\frac{1}{a}\,x-\frac{b}{a}\right\}$$

▲ Por ejemplo, para $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y=x\}$



▲ Para $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y=2x+1\}$



$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x + 1\}$$

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right)(L) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\right\}$$

♦ Podemos extender esta idea a otras cónicas:

Si por ejemplo consideramos la elipse centrada en el origen $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ entonces

$$\begin{aligned}
u \in E \quad &\Longleftrightarrow \quad u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ y = \pm\, b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \\
&\Longleftrightarrow \quad u = \left(x, \pm\, b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}\,\right) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

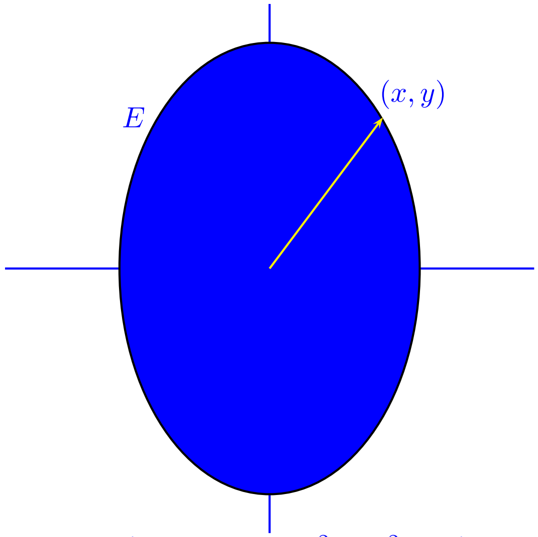
Ahora, como $R\left(\frac{\pi}{2}\right)(u) = R\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x, \pm\, b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}\,\right) = \left(\pm\, b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}, x\right)$ entonces

$$x = \mp\, b\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)} \Longleftrightarrow x^2 = b^2\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \Longleftrightarrow \frac{x^2}{b^2} = \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \Longleftrightarrow \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

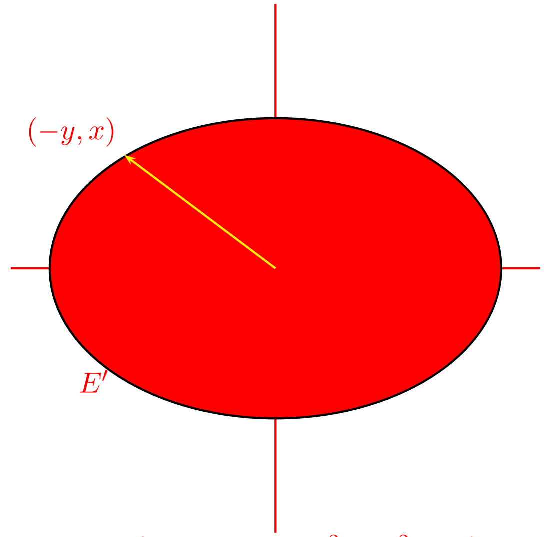
Conclusión 1.2.2. *Si llamamos* $E' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1\right\}$ *entonces tenemos*

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\} \Longleftrightarrow R\left(\frac{\pi}{2}\right)(E) = E' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1\right\}$$

▲ Por ejemplo, para $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$ tenemos



$$\text{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$



$$\text{E'} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$$

♦ En general, si $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1;\ (a > b)\right\}$ entonces

$$\begin{aligned}
u \in E \quad &\Longleftrightarrow \quad u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ (y-k)^2 = b^2\left(1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ y - k = \pm\, b\sqrt{\left(1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}\right)} \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ y = k \pm\ b\sqrt{\left(1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}\right)}
\end{aligned}$$

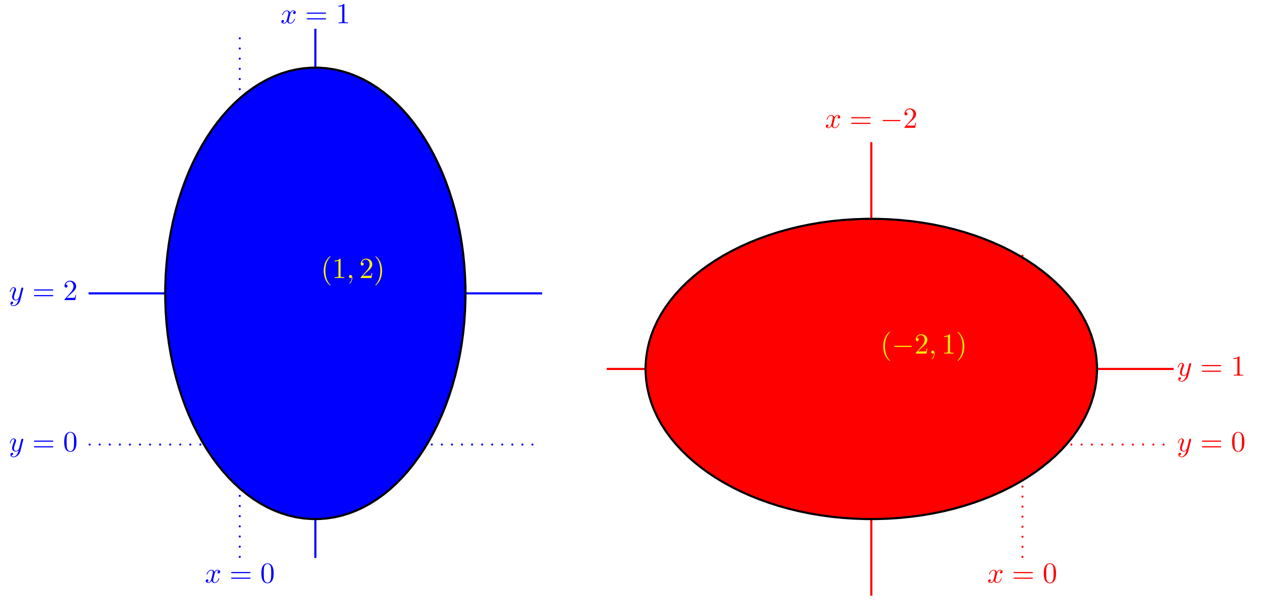
Ahora, como $R\left(\frac{\pi}{2}\right)(u) = R\left(\frac{\pi}{2}\right)(x,y) = (-y,x)$ entonces

$$\begin{aligned}
x = k \mp\ b\sqrt{\left(1 - \frac{(y-h)^2}{a^2}\right)} \quad &\Longleftrightarrow \quad x - k = \mp\, b\sqrt{\left(1 - \frac{(y-h)^2}{a^2}\right)} \\
&\Longleftrightarrow \quad (x-k)^2 = b^2\left(1 - \frac{(y-h)^2}{a^2}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(x-k)^2}{b^2} = \left(1 - \frac{(y-h)^2}{a^2}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(y-h)^2}{a^2} + \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

Conclusión 1.2.3. *Si llamamos* $E' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{(y-h)^2}{a^2} + \dfrac{(x-k)^2}{b^2} = 1\right\}$ *entonces tenemos*

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\right\} \Longleftrightarrow R\left(\frac{\pi}{2}\right)(E) = E' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(y-h)^2}{a^2} + \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1\right\}$$

Así que por ejemplo el comportamiento gráfico para $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1\right\}$ es del tipo:



$$\mathrm{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1\right\} \qquad \mathrm{E'} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1\right\}$$

1.2.4. Identificaciones útiles. Es importante observar los siguientes hechos que bien utilizados se tornan importantes para la comprensión geométrica de las cónicas y otras figuras del plano

(1) Como grupos son isomorfos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)$ a través por ejemplo del isomorfismo canónico:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \text{ tal que } \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2) Las matrices con el producto usual de matrices constituyen un anillo, así que por ejemplo.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

(3) En particular podemos observar que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\varphi(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) &= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \Longrightarrow \\
\varphi(R(\theta)(x,y)) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \\
(\varphi\circ R(\theta))(x,y)) &= \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{M(\theta)} \circ\varphi\right](x,y) \Longrightarrow \\
(\varphi\circ R(\theta))(x,y)) &= [M(\theta)\circ\varphi](x,y)
\end{aligned} \tag{29}$$

Esa situación puede ser diagramada como sigue:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "R(\theta)"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1) \arrow[r, "M(\theta)"'] & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)
\end{tikzcd}$$

Conclusión 1.2.5. *De lo obtenido en el análisis* (29)*, podemos concluir que:*

- *"Rotar un punto del plano en un ángulo θ es equivalente (salvo isomorfismo) a multiplicar por la matriz $M(\theta)$ a la imagen isomorfica $\varphi(x,y)$"*
- *En particular para $\theta = \frac{\pi}{2}$ tenemos que*

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right)(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

1.2.6. Ejercicios Propuestos.

(1) Para las siguientes rectas aplique $M(\frac{\pi}{2})$ y grafique ambas rectas

(a) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3\}$
(b) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$
(c) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -3x + 3\}$
(d) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 5\}$
(e) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b \quad (a \neq 0)\}$. Concluya que $L \perp M(90)(L)$

(2) Para las siguientes parábolas aplique $M(\frac{\pi}{2})$ y grafique ambas parábolas

(a) $P = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\right\}$
(b) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x+1)^2\}$
(c) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x-1)^2\}$
(d) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (y+1)^2\}$
(e) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (y-1)^2\}$
(f) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + x^2\}$
(g) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + x + x^2\}$

(3) Si considera la parábola $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x) = ax^2+bx+c\}$ entonces demuestre que para $q(x_0) = y_0$, $q'(x_0)\cdot(M(\frac{\pi}{2})(q))'(x_0) = -1$

(4) Para las siguientes elipses aplique $M(\frac{\pi}{2})$ y grafique ambas elipses

(a) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1\right\}$

(b) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{y^2}{1} + \dfrac{x^2}{4} = 1\right\}$

(c) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{(x-3)^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1\right\}$

(d) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1\right\}$

(e) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{(x-2)^2}{1} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1\right\}$

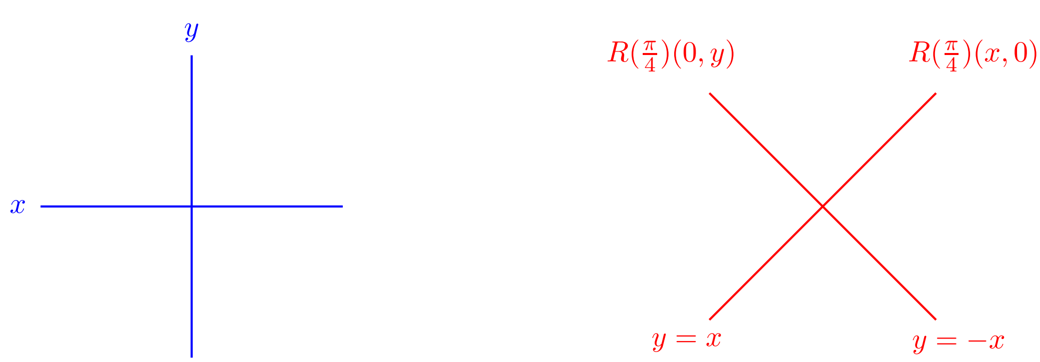
1.3. Rotación del plano $\mathbb{R}^2$ para $\theta = \frac{\pi}{4}$, es decir 45°.

♦ En este caso, $M(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) \\ \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

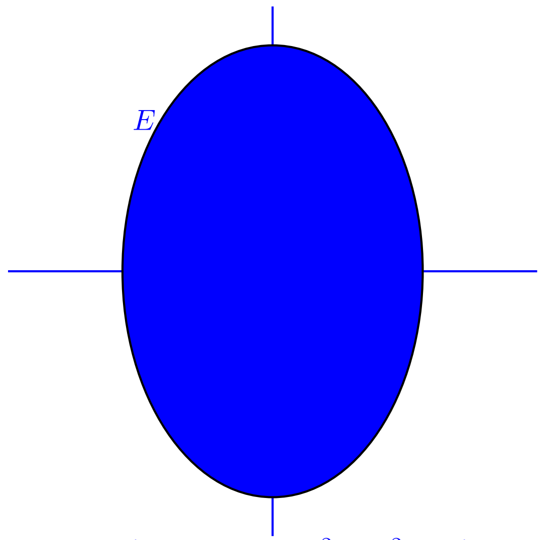
Así que

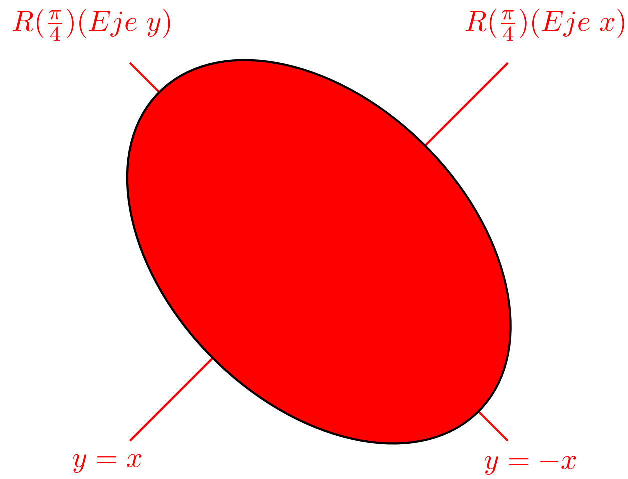
$$M\left(\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{pmatrix}$$

♦ Transformación de los ejes coordenados.



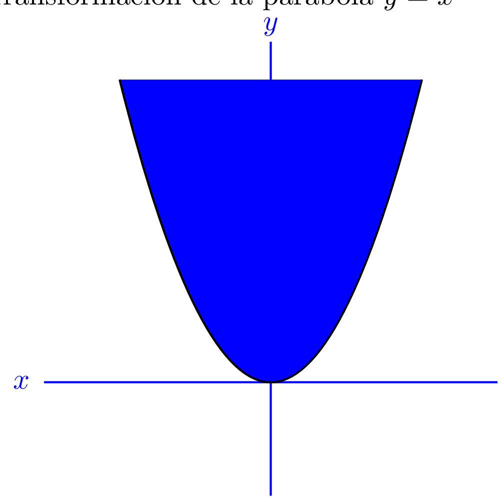
♦ Transformación de la elipse $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$

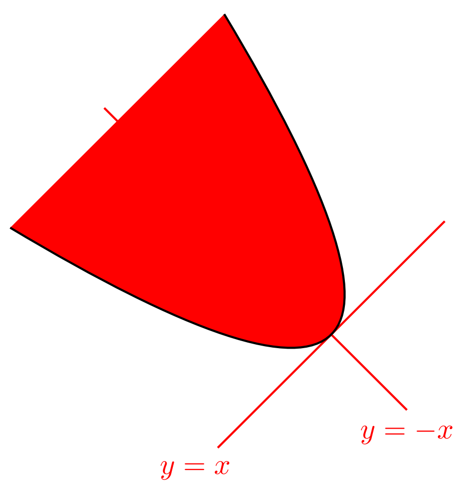




$$\text{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\} \qquad \text{E'} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{[\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)]^2}{4} + \frac{[\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)]^2}{9} = 1\right\}$$

♦ Transformación de la parábola $y = x^2$





$$\text{P} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\right\} \qquad \text{P} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\right)^2\right\}$$

1.3.1. Ejercicios Propuestos.

(1) Para las siguientes rectas aplique $M(\frac{\pi}{4})$, y grafique ambas rectas

(a) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3\}$
(b) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$
(c) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -3x + 3\}$
(d) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 5\}$
(e) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b \quad (a \neq 0)\}$

(2) Para las siguientes parábolas aplique $M(\frac{\pi}{4})$, y grafique ambas parábolas

(a) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 1)^2\}$
(b) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x - 1)^2\}$
(c) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (y + 1)^2\}$
(d) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = (y - 1)^2\}$
(e) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + x^2\}$
(f) $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 + x + x^2\}$

(3) Para las siguientes elipses aplique $M(\frac{\pi}{4})$, y grafique ambas elipses

(a) $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1\right\}$
(b) $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{y^2}{1} + \dfrac{x^2}{4} = 1\right\}$
(c) $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{(x-3)^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1\right\}$
(d) $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1\right\}$
(e) $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{(x-2)^2}{1} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1\right\}$

(4) Muestre que $\left(R\left(\frac{\pi}{4}\right) \circ R\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = R\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(5) Muestre que $M\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot M\left(\frac{\pi}{4}\right) = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(6) Demuestre que $(R(\theta_1) \circ R(\theta_2)) = R(\theta_1 + \theta_2)$

(7) Demuestre que $M(\theta_1) \cdot M(\theta_2) = M(\theta_1 + \theta_2)$

2. Traslaciones en el plano

Definición 2.1. *Llamaremos Traslación respecto del punto $P = (r, s)$, a la función.*

$$T_{(r,s)} : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \ \textit{tal que} \ T_{(r,s)}(x, y) = (x + r, y + s)$$

2.1.1. Traslaciones de rectas. Consideremos una recta $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$ entonces si aplicamos una traslación respecto del punto P tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
u \in L &\iff u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ e } \ y = ax + b \\
&\iff u = (x, ax + b) \in \mathbb{R}^2 \\
&\Longrightarrow T_{(r,s)}(u) = T_{(r,s)}(x, ax + b) \\
&\Longrightarrow T_{(r,s)}(u) = (x + r, ax + b + s)
\end{aligned}$$

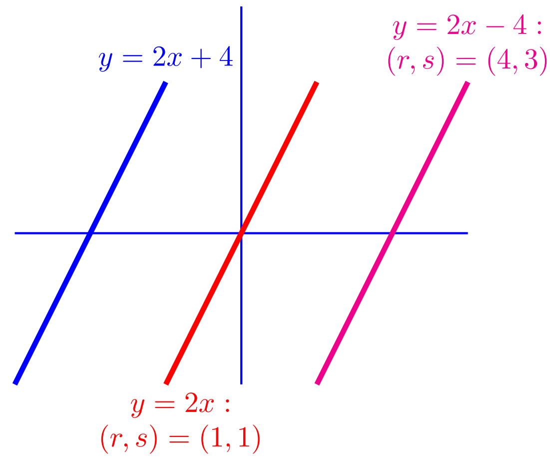
Así, $P_1 = (x_1, y_1) \in L$ y $P_2 = (x_2, y_2) \in L$ tenemos $T_{(r,s)}(P_1) = (x_1 + r, ax_1 + b + s)$ y $T_{(r,s)}(P_2) = (x_2 + r, ax_2 + b + s)$, además la recta que pasa por $T_{(r,s)}(P_1)$ y $T_{(r,s)}(P_2)$ es de la forma

$$y = Ax + B \tag{30}$$

- Donde $A = \dfrac{(ax_2+b+s)-(ax_1+b+s)}{(x_2+r)-(x_1+r)} = \dfrac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = a \quad (\text{si } x_1 \neq x_2)$
- Y B satisface la ecuación: $ax_1+b+s = A(x_1+r)+B$. Es decir $B = b+s-ar$

  Luego, la recta (30) es de la forma $L' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = ax+(b+s-ar)\}$

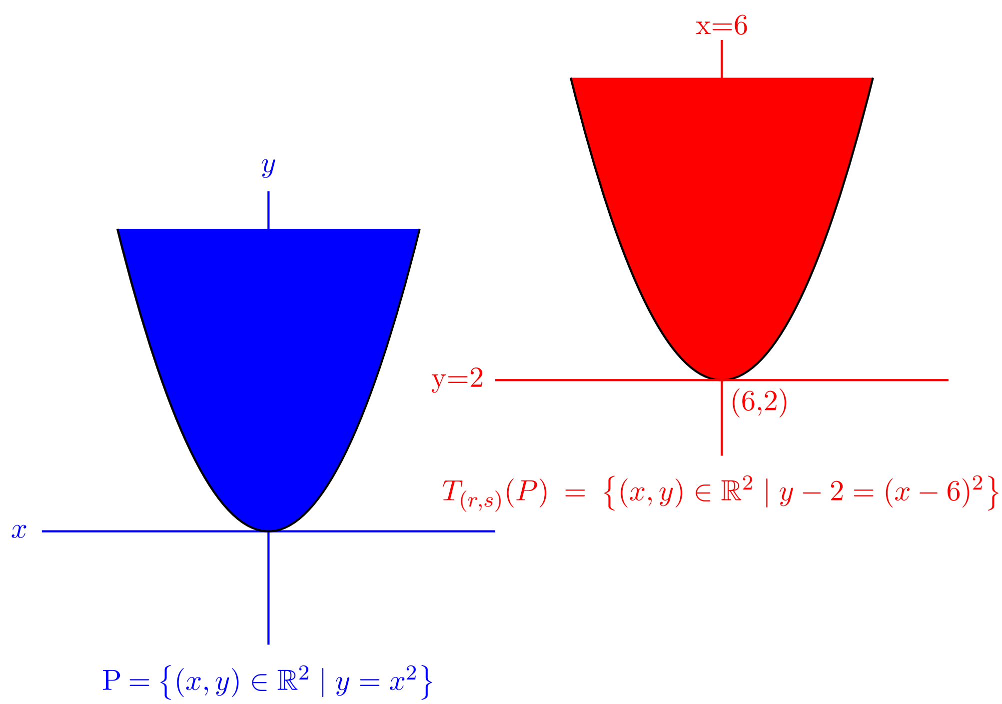
Ejemplo 2.1.2. *Si* $L = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 2x+1\}$ *entonces* $L' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 2x+(1+s-2r)\}$



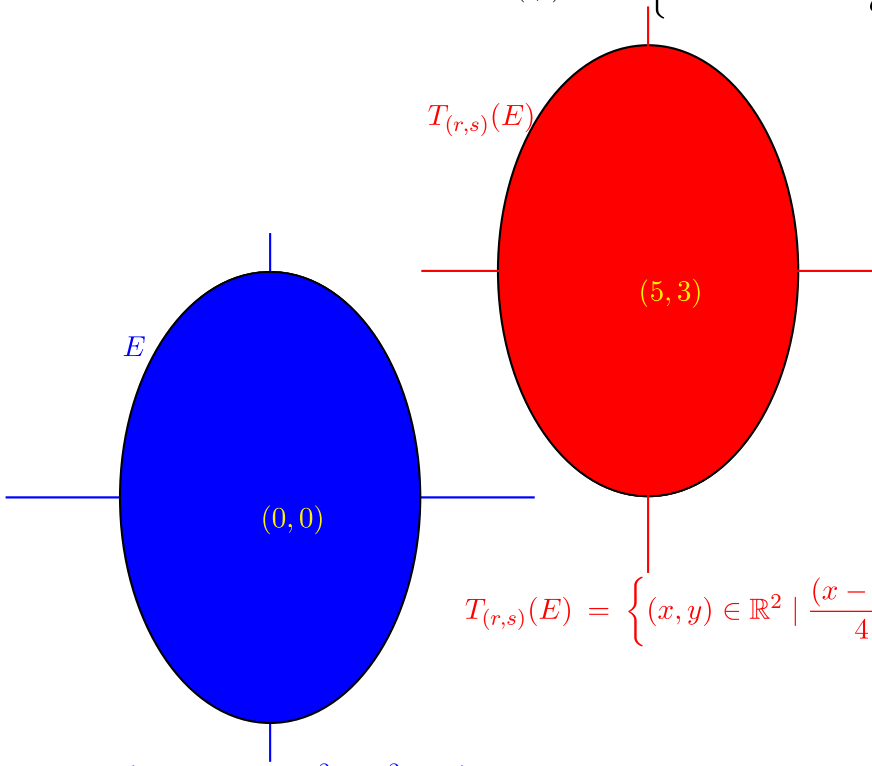
2.2. Traslaciones de parábolas. Consideremos la parábola canónica $P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ entonces

$$\begin{aligned} T_{(r,s)}(P) &= \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u = x+r \wedge v = y+s \text{ e } y = x^2\} \\ &= \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid v-s = (u-r)^2\} \end{aligned}$$

Conclusión 2.2.1. *Si* $P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ *entonces* $T_{(r,s)}(P) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y-s = (x-r)^2\}$



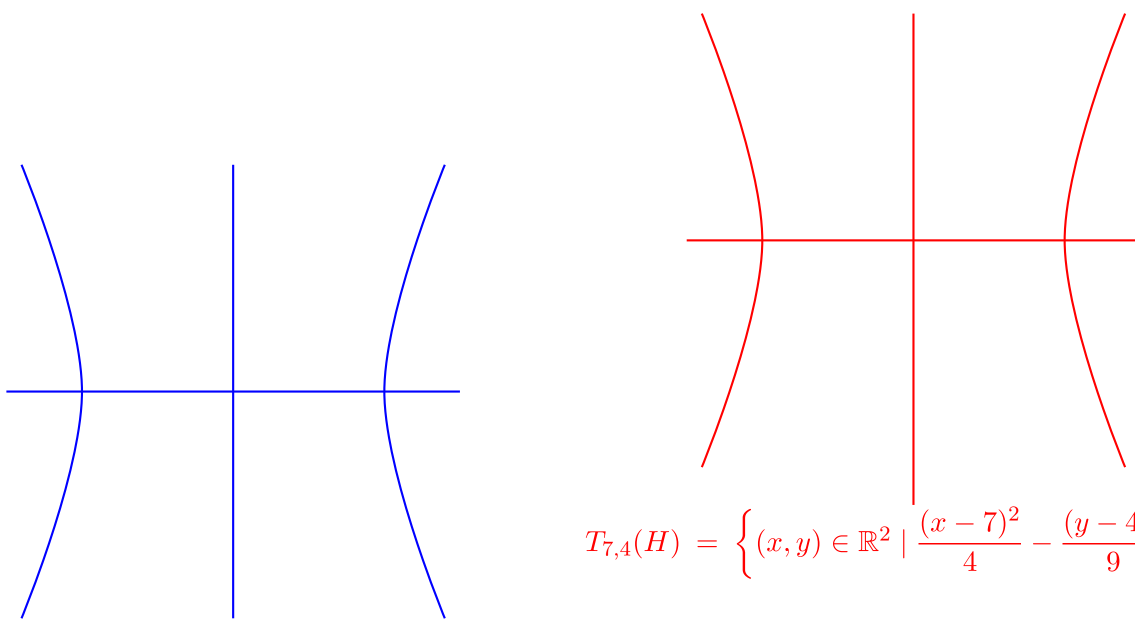
2.3. Traslaciones de elipses. Si consideremos la elipse canónica $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ entonces la elipse trasladada es de la forma $T_{(r,s)}(E) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{(x-r)^2}{a^2} + \dfrac{(y-s)^2}{b^2} = 1\right\}$, y



$T_{(r,s)}(E) \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{(x-5)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1\right\}$

$\mathrm{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$

2.4. Traslaciones de hipérbolas.



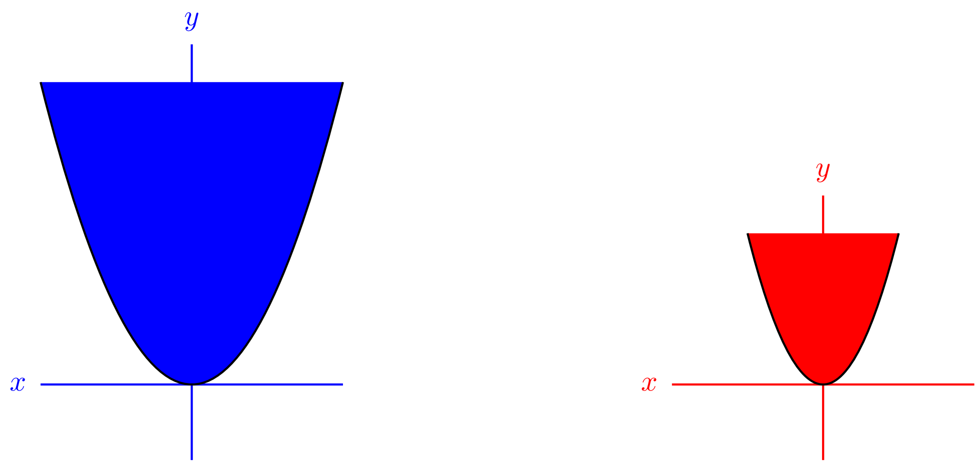
$T_{7,4}(H) \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{(x-7)^2}{4} - \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1\right\}$

$\mathrm{H} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$

3. Contracciones y Dilataciones

Definición 3.1. *Llamaremos contracción del plano a una función* $T_c : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *tal que* $T_c(x, y) = (c{\cdot}x, c{\cdot}y)$, *con* $(c \in \mathbb{R}; 0 < c < 1)$

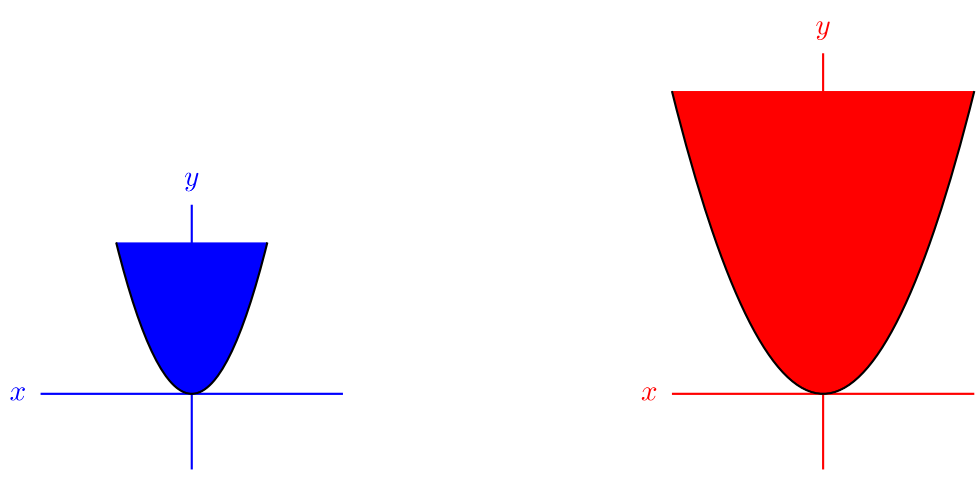
Ejemplo 3.1.1. *Si* $c = \frac{1}{2}$ *entonces* $T_{\frac{1}{2}}(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, *y su comportamiento es el siguiente:*



$\mathrm{P} = \left\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ $\qquad$ $T_{\frac{1}{2}}(P) \ = \ \left\{(\frac{x}{2}, \frac{x^2}{2}) \ |x \in \mathbb{R}\right\}$

Definición 3.2. *Llamaremos dilatación del plano a una función* $T_c : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ *tal que* $T_c(x, y) = (c{\cdot}x, c{\cdot}y)$, *con* $(c \in \mathbb{R}; c > 1)$

Ejemplo 3.2.1. *Si* $c = 2$ *entonces* $T_2(x, y) = (2x, 2y)$, *y su comportamiento es el siguiente:*



$P \ = \ \left\{(x, x^2 \ |x \in \mathbb{R}\right\}$ $\qquad$ $\mathrm{P} = \left\{(2x, 2x^2) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

Observación 3.3. *Contracciones y dilataciones están íntimamente relacionadas en el siguiente sentido:*

(1) *Si T_c es una contracción entonces T_c es una biyección y $(T_c)^{-1} = T_{\frac{1}{c}}$.*

Para verificar esta tenemos una técnica general, que consiste en verificar directamente si la composición de T_c y $T_{\frac{1}{c}}$ es la función identidad del plano entonces en consecuencia procedemos a la verificación:

$$\begin{aligned}
(T_c \circ (T_{\frac{1}{c}}))(x,y) &= T_c(T_{\frac{1}{c}}(x,y)) \\
&= T_c\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) \\
&= \left(c \cdot \frac{x}{c}, c \cdot \frac{y}{c}\right) \\
&= (x,y)
\end{aligned}$$

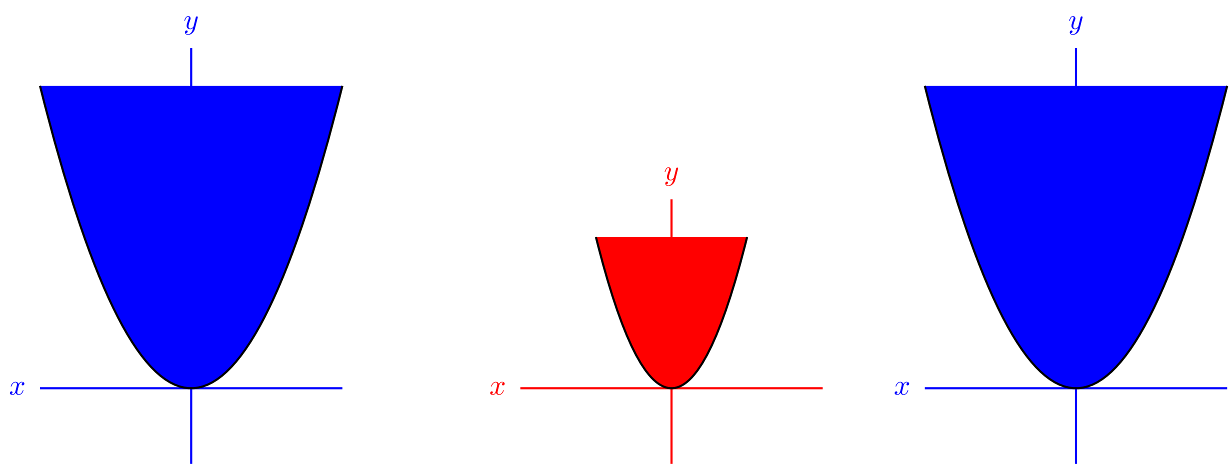
Análogamente,

$$\begin{aligned}
(T_{\frac{1}{c}} \circ (T_c)(x,y) &= T_{\frac{1}{c}}(T_c(x,y)) \\
&= T_{\frac{1}{c}}\left(c \cdot x, c \cdot y\right) \\
&= \left(\frac{1}{c} \cdot c \cdot x, \frac{1}{c} \cdot c \cdot y\right) \\
&= (x,y)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left.\begin{aligned}
T_c \circ (T_{\frac{1}{c}}) &= 1_{\mathbb{R}^2} \\
T_{\frac{1}{c}} \circ (T_c) &= 1_{\mathbb{R}^2}
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow (T_c)^{-1} = T_{\frac{1}{c}}$$

(2) *Gráficamente la situación se ve como sigue:*



$P = \left\{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad T_c(P) = P' = \left\{(cx, cx^2) \mid 0 < c < 1 \wedge x \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad T_{\frac{1}{c}}(P') = P = \left\{(x,x^2) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

(3) *T_c es un homomorfismo de grupos, $(c \in \mathbb{R}-\{0\})$. Es decir T_c es un isomorfismo de grupos, $(c \in \mathbb{R}-\{0\})$.*

En efecto

Si $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ *y* $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *entonces debemos mostrar que* $T_c(u+v) = T_c(u) + T_c(v)$

$$\begin{aligned} T_c(u+v) &= T_c(x_1+x_2, y_1+y_2) = (c(x_1+x_2), c(y_1+y_2)) = (cx_1+cx_2, cy_1+cy_2) \\ &= (cx_1, cy_1) + (cx_2, cy_2) = c(x_1, y_1) + c(x_2, y_2) \\ &= T_c(x_1, y_1) + T_c(x_2, y_2) \\ &= T_c(u) + T_c(v) \end{aligned}$$

4. Otras aplicaciones

4.1. Contracciones aplicadas a una elipse.

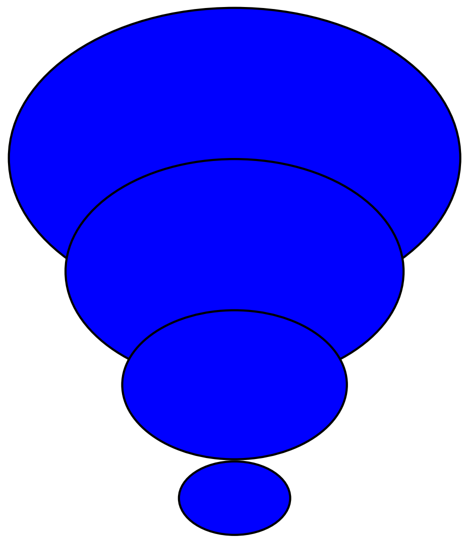


Figura 39 Contracciones sucesivas de elipse

4.2. Rotaciones y traslaciones aplicadas a una parábola.

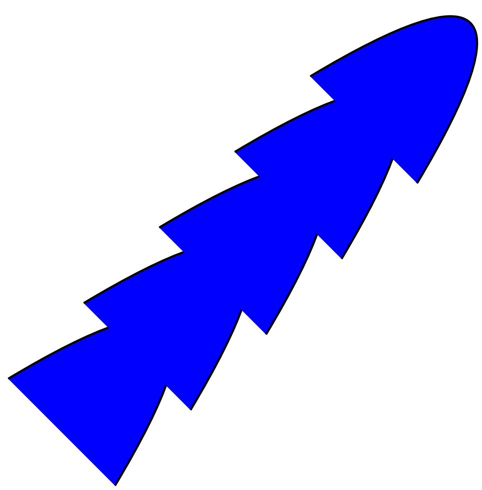


Figura: 40 Rotaciones y traslaciones a una parábola

4.3. Dilataciones aplicadas a una elipse.

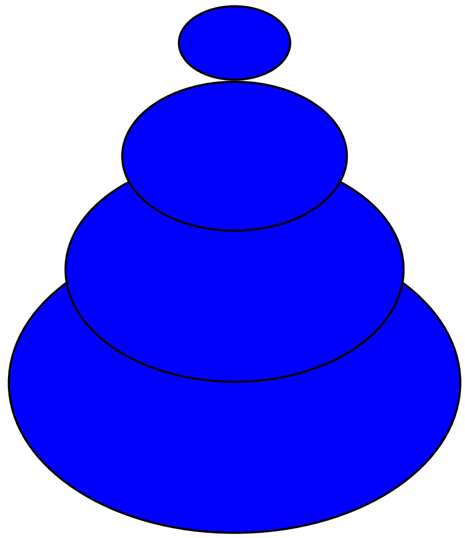


Figura 41 Dilataciones sucesivas de elipse

4.3.1. Ejercicios Propuestos.

(1) Considere la circunferencia $C(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(a) Calcule, $T_{\frac{1}{2}}(C(0,0))$, $T_{\frac{1}{3}}(C(0,0))$, $T_{\frac{1}{4}}(C(0,0))$

(b) Grafique, $T_{\frac{1}{2}}(C(0,0))$, $T_{\frac{1}{3}}(C(0,0))$, $T_{\frac{1}{4}}(C(0,0))$

(2) Considere la circunferencia $C(h,k) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad (r > 0)\}$ y la sucesión de números reales $\{a_n \mid a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}; n \geq 2)\}$
Determine $T_{a_n}(C(h,k))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluya que $\lim\limits_{n\to\infty} T_{a_n}(C(h,k)) = C(h,k)$

(3) Muestre que $M(\theta) \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) \quad (\forall \theta; \theta \in \mathbb{R})$

Bibliografía

[1] Bello, I. "Álgebra Elemental ", Brooks/Cole Publishing Company 1999.

[2] Bobadilla, G. Labarca R. "Cálculo 1 ", Facultad de Ciencia, Universidad de Santiago 2007.

[3] Boldrini, J. Rodriguez, S. Figueiredo, V. Wetzler, H. "Álgebra Linear", Editora Harper & Row do Brasisl Ltda, 1984.

[4] Fraleigh J. "Álgebra Abstracta "Addison-Wesley Iberoamericana 1988.

[5] Grimaldi, R. "Matemáticas Discretas y Combinatorias ", Addison Wesley 1997.

[6] Gustafson, R. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[7] Kaufmann, J. "Álgebra Intermedia ", Brooks/Cole Publishing Company 2000

[8] Santander, R. "Álgebra Elemental y superior", Universidad de Santiago 2004

[9] Santander, R. "Álgebra Lineal", Universidad de Santiago 2004

[10] Santander, R. "Un Segundo curso de Algebra Lineal"

[11] Swokowski, E. "Álgebra y trigonometría ", Brooks/Cole Publishing Company 1997.

[12] Zill, D. " Álgebra y trigonometría ", Mc Graw Hill 1999

Indice Alfabético