Proyecto USA 1402:
“Fortalecimiento de la enseñanza de la Disciplina de Álgebra Lineal, conforme a las necesidades que plantea la formación profesional en el siglo XXI.”

Profesor Ricardo Santander Baeza

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación
Universidad de Santiago de Chile

Mayo del 2015

Introducción: Generación de Matrices

- **Para introducir una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 4)$ se escribe en pantalla como sigue:**

```
-->A=[1 2 3 4;5 6 7 8]
 A  =

    1.    2.    3.    4.
    5.    6.    7.    8.
```

- **Para conocer el tamaño de una matriz ya construida:**

```
-->T=size(A)
 T  =

    2.    4.
```

- **Para determinar el elemento de la posición ij de A:**

```
-->A(2,3)
 ans  =

    7.
```

- **Para obtener una fila de una matriz dada:**

```
-->A(1,:)
 ans  =

    1.    2.    3.    4.
```

- **Para obtener una columna de una matriz dada:**

```
-->A(:,3)
 ans  =

    3.
    7.
```

- **Para obtener más de una columna de una matriz dada:**

```
-->A(:,2:4)
 ans  =

    2.    3.    4.
    6.    7.    8.
```

Ejercicios usando Scilab sobre matrices y sus elementos característicos

- **Construya** $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 3)$**,** $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 3)$ **y** $C \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(5)$
- **Determine para las matrices** A, B, C **definidas encima:**

(a) $size(A)$	(b) $size(B)$	(c) $size(C)$
(d) $A(1,3)$	(e) $A(2,:)$	(f) $A(:,2)$
(g) $B(3,3)$	(h) $B(4,:)$	(i) $B(:,3)$
(j) $B(2:4,:)$	(k) $B(:,3:5)$	(l) $B(1:3,2:3)$
(m) $B(2:4,:)$	(n) $B(:,3:5)$	(o) $B(1:3,2:3)$

Algunas Matrices Especiales y sus elementos

- **Construcción de matrices aleatorias usando Scilab:**

```
-->A=rand(3,3)
 A  =
    0.3126    0.5664    0.5935
    0.3616    0.4826    0.5015
    0.2922    0.3322    0.4369
```

- **Matriz nula:**

```
-->A=zeros(2,3)
 A  =
    0.    0.    0.
    0.    0.    0.
```

- **Matriz de unos**

```
-->A=ones(2,3)
 A  =
    1.    1.    1.
    1.    1.    1.
```

- **Matriz identidad:**

```
-->I=eye(3,3)
 I  =

    1.    0.    0.
    0.    1.    0.
    0.    0.    1.
```

Matriz diagonal:

```
-->D=diag([-1 3 7])
 D  =
  - 1.    0.    0.
    0.    3.    0.
    0.    0.    7.
```

Matriz traspuesta

```
-->O=ones(3,4)
 O  =

    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.

-->O'


 ans  =

    1.    1.    1.
    1.    1.    1.
    1.    1.    1.
    1.    1.    1.
```

Adición de Matrices

Dadas las Matrices $U = (u_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ **y** $V = (v_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ **entonces en Scilab definimos**

$$U + V = (u_{ij} + v_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$$

Si definimos las matrices A, B **entonces usando Scilab podemos generar las siguientes nuevas matrices:**

```
-->A=[1 -3 5 7;2 0 -1 4;1 1 0 5;2 -3 7 0]
 A  =
    1.  - 3.    5.    7.
    2.    0.  - 1.    4.
    1.    1.    0.    5.
    2.  - 3.    7.    0.

-->B=[1 1 -4 9;2 3 1 0;4 6 9 3;1 1 -5 -2]
 B  =
    1.    1.  - 4.    9.
    2.    3.    1.    0.
    4.    6.    9.    3.
    1.    1.  - 5.  - 2.

-->(A+B)
 ans  =
    2.  - 2.    1.    16.
    4.    3.    0.    4.
    5.    7.    9.    8.
    3.  - 2.    2.  - 2.
```

Ponderación de Matrices

Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ **y** $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$**. La ponderación de matrices es definida por**

$$\lambda * A$$

Dada la matriz A **tenemos por ejemplo:**

```
-->A=[1:5;-3:1;-4:0]
 A  =
    1.     2.     3.     4.     5.
  - 3.   - 2.   - 1.     0.     1.
  - 4.   - 3.   - 2.   - 1.     0.

-->A+A
 ans  =

    2.     4.     6.     8.     10.
  - 6.   - 4.   - 2.     0.     2.
  - 8.   - 6.   - 4.   - 2.     0.

-->2*A
 ans  =
    2.     4.     6.     8.     10.
  - 6.   - 4.   - 2.     0.     2.
  - 8.   - 6.   - 4.   - 2.     0.
```

```
-->0.5*A

 ans  =

    0.5    1.     1.5    2.     2.5
  - 1.5  - 1.   - 0.5    0.     0.5
  - 2.   - 1.5  - 1.   - 0.5    0.

-->(1/3)*A

 ans  =
    0.3333333    0.6666667    1.           1.3333333    1.6666667
  - 1.         - 0.6666667  - 0.3333333    0.           0.3333333
  - 1.3333333  - 1.         - 0.6666667  - 0.3333333    0.

-->sqrt(2)

 ans  =

    1.4142136

-->sqrt(2)*A
 ans  =
    1.4142136    2.8284271    4.2426407    5.6568542    7.0710678
  - 4.2426407  - 2.8284271  - 1.4142136    0.           1.4142136
  - 5.6568542  - 4.2426407  - 2.8284271  - 1.4142136    0.
```

Traspuesta de una matriz

Dada $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ entonces la traspuesta es definida por A'

```
--> A=[2 -4  5  6; 1 3 7 9; -1 -3 4 5]
 A  =


    2.  - 4.    5.    6.
    1.    3.    7.    9.
  - 1.  - 3.    4.    5.

-->A'
 ans  =


    2.    1.  - 1.
  - 4.    3.  - 3.
    5.    7.    4.
    6.    9.    5.

-->(A')'
 ans  =


    2.  - 4.    5.    6.
    1.    3.    7.    9.
  - 1.  - 3.    4.    5.
```

```
-->A=[2 -4  5  6; 1 3 7 9]
 A  =

    2.  - 4.    5.    6.
    1.    3.    7.    9.

-->B=[4 7 -2 5;1 -3 7 9]
 B  =

    4.    7.  - 2.    5.
    1.  - 3.    7.    9.

-->(A+B)'
 ans  =

    6.     2.
    3.     0.
    3.     14.
    11.    18.

-->A'+B'
 ans  =

    6.     2.
    3.     0.
    3.     14.
    11.    18.
```

Construcción de Matrices Simétricas.

```
-->B=[3 -4 8;2 5 1;1 2 0]
 B  =


    3.  - 4.    8.
    2.    5.    1.
    1.    2.    0.

-->B+B'


 ans  =


    6.  - 2.     9.
  - 2.    10.    3.
    9.    3.     0.

-->C=rand(3,3)
 C  =
    0.2113249    0.3303271    0.8497452
    0.7560439    0.6653811    0.6857310
    0.0002211    0.6283918    0.8782165

-->C+C'
 ans  =
    0.4226497    1.0863709    0.8499664
    1.0863709    1.3307622    1.3141228
    0.8499664    1.3141228    1.756433
```

Construcción de Matrices Antisimétricas.

```
-->A=[2 -4;3 1]

 A  =
    2.  - 4.
    3.    1.

-->A-A'


 ans  =
    0.  - 7.
    7.    0.

-->B=[6 -2 1; 1 1 -3; 2 4 6]


 B  =


    6.  - 2.    1.
    1.    1.  - 3.
    2.    4.    6.

-->B-B'


 ans  =
    0.  - 3.  - 1.
    3.    0.  - 7.
    1.    7.    0.
```

Producto de Matrices

Dadas las matrices $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times s)$ entonces el producto en Scilab se define como

$$C = A * B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$$

Por ejemplo;

```
-->A=[1 3 2 9;-2 4 -7 9]

 A  =
    1.     3.     2.     9.
  - 2.     4.   - 7.     9.

-->B=[-4 7 9;5 2 8;1 1 1; 0 -1 6]

 B  =


  - 4.     7.     9.
    5.     2.     8.
    1.     1.     1.
    0.   - 1.     6.

-->C=A*B
 C  =
    13.     6.      89.
    21.   - 22.     61.
```

```
-->D=[4 2 5;4 6 -8;-1 0 1]
 D  =
    4.    2.    5.
    4.    6.  - 8.
  - 1.    0.    1.

-->D*D
 ans  =
    19.    20.    9.
    48.    44.  - 36.
  - 5.   - 2.   - 4.

-->D^2
 ans  =
    19.    20.    9.
    48.    44.  - 36.
  - 5.   - 2.   - 4.

-->D^3
 ans  =
    147.    158.  - 56.
    404.    360.  - 148.
  - 24.   - 22.   - 13
```

Determinante de una Matriz

Dada la matriz $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ **entonces definimos en Scilab determinante de** A**, como** $\det(A)$**. Así para la matriz** A **y** B **dadas:**

```
A=[1 3 5;2 6 8;1 1 1]
 A  =
    1.    3.    5.
    2.    6.    8.
    1.    1.    1.
-->det(A)
 ans  =
  - 4.
-->B=[1 2 3;2 2 2;1 4 6]
 B  =
    1.    2.    3.
    2.    2.    2.
    1.    4.    6.
-->det(B)
 ans  =
    2.
-->B=[1 2 3;2 2 2;2 4 6]
 B  =
    1.    2.    3.
    2.    2.    2.
    2.    4.    6.
-->det(B)
 ans  =
    0.
```

Matrices invertibles o Unidades

Recordamos que una matriz $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ es invertible si existe $A^{-1} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

En Scilab cuando A^{-1} existe la obtenemos como: A^-1

Así por ejemplo:

```
-->A=[1 3 5;2 6 8;1 1 1]
 A  =
    1.    3.    5.
    2.    6.    8.
    1.    1.    1.

-->A^-1
 ans  =
    0.5  - 0.5    1.5
  - 1.5    1.   - 0.5
    1.   - 0.5    0.

-->A*A^-1
 ans  =
    1.    0.    0.
    0.    1.    0.
    0.    0.    1.
```

En particular recordamos que $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$. **Así que**

```
-->det(A)
 ans  =
  - 4.
-->det(A^-1)
 ans  =
  - 0.25

-->B=[2 3 5 -7;4 0 -1 3;1 2 1 4;1 6 9 -11]
 B  =
    2.    3.    5.  - 7.
    4.    0.  - 1.    3.
    1.    2.    1.    4.
    1.    6.    9.  - 11.
-->det(B)
 ans  =
  - 35
-->D=[0 -1 -3 -4; 2 2 2 6; 1 1 3 6; 9 5 -6 4]

 D  =
    0.  - 1.  - 3.  - 4.
    2.    2.    2.    6.
    1.    1.    3.    6.
    9.    5.  - 6.    4.
-->det(D)
 ans  =
  - 10.
```

```
-->C=[1 2 3 4 5;2 4  6 8 10;3 2 6 -3 0; 1 1 1 -3 7;9 7 0 3 4]
 C  =
    1.    2.    3.    4.    5.
    2.    4.    6.    8.    10.
    3.    2.    6.  - 3.    0.
    1.    1.    1.  - 3.    7.
    9.    7.    0.    3.    4.

-->det(C)
 ans  =
    0.

-->A=ones(6,6)

 A  =

    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.    1.    1.

-->det(A)

 ans  =
    0
```

Operaciones Elementales de Matrices

Para $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ definimos las operaciones elementales:

$$\begin{aligned} (l_i \rightarrow \alpha \cdot l_i)(A) \\ (l_i \leftrightarrow l_j)(A) \\ (l_i \rightarrow l_i + \alpha \cdot l_j)(A) \end{aligned}$$

Con Scilab en este contexto podemos hacer, por ejemplo lo siguiente:

```
-->A=[1 3 -5 7;2 5 -3 1;8 9 4 1;2 0 -3 4]
 A  =
    1.    3.  - 5.    7.
    2.    5.  - 3.    1.
    8.    9.    4.    1.
    2.    0.  - 3.    4.

-->B=[A(1,:);A(2,:)-2*A(1,:);A(3,:)-8*A(1,:);A(4,:)-2*A(1,:)]

 B  =
    1.    3.    - 5.     7.
    0.  - 1.      7.   - 13.
    0.  - 15.    44.   - 55.
    0.  - 6.      7.   - 10.
```

```
-->C=[B(1,:);(-1)*B(2,:);B(3,:);B(4,:)]

 C  =
    1.     3.   - 5.      7.
    0.     1.   - 7.      13.
    0.   - 15.    44.   - 55.
    0.   - 6.     7.    - 10.


-->D=[C(1,:)-3*C(2,:);C(2,:);C(3,:)+15*C(2,:);C(4,:)+6*C(2,:)]

 D  =
    1.     0.     16.   - 32.
    0.     1.   - 7.      13.
    0.     0.   - 61.     140.
    0.     0.   - 35.     68.

-->E=[D(1,:);D(2,:);(-1/61)*D(3,:);D(4,:)]

 E  =
    1.     0.     16.   - 32.
    0.     1.   - 7.      13.
    0.     0.     1.    - 2.295082
    0.     0.   - 35.     68.
```

```
-->F=[E(1,:)-16*E(3,:);E(2,:)+7*E(3,:);E(3,:);E(4,:)+35*E(3,:)]

 F  =

    1.    0.    0.    4.7213115
    0.    1.    0.  - 3.0655738
    0.    0.    1.  - 2.295082
    0.    0.    0.  - 12.327869

->G=[F(1,:);F(2,:);F(3,:);(-1/12.327869)*F(4,:)]

 G  =
    1.    0.    0.    4.7213115
    0.    1.    0.  - 3.0655738
    0.    0.    1.  - 2.295082
    0.    0.    0.    1.0000000

-->format(4)

-->H=[G(1,:)-4.7213115*G(4,:);G(2,:)+3.0655738*G(4,:);G(3,:)+2.295082*G(4,:);G(4,:)]

 H  =
    1.    0.    0.    0.0
    0.    1.    0.  - 0.0
    0.    0.    1.    0.0
    0.    0.    0.    1.
```

Rango de una Matriz

Para $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ definimos el rango de A como

$$rank(A)$$

Así por ejemplo

```
-->A=[1 3 -5 7;2 5 -3 1;8 9 4 1;2 0 -3 4]
 A  =
    1.    3.  - 5.    7.
    2.    5.  - 3.    1.
    8.    9.    4.    1.
    2.    0.  - 3.    4.

-->rank(A)
 ans  =
    4.

-->B=ones(5,4)
 B  =
    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.
-->rank(B)
 ans  =
    1.
```

Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -2 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Aplicamos el teorema del rango a la matriz ampliada asociada la sistema $(*)$ como sigue: Generamos con Scilab las matriz A y la matriz ampliada $(A|B)$ asociadas al sistema $(*)$, porque queremos comparar sus rangos, para aplicar la información que suministra el teorema del rango.

```
-->AB=[1 1 1 1;1 -1 -1 2;2 3 -1 -2]
 AB  =
    1.    1.    1.    1.
    1.  - 1.  - 1.    2.
    2.    3.  - 1.  - 2.
-->A=[1 1 1 ;1  -1 -1;2 3 -1 ]
 A  =
    1.    1.    1.
    1.  - 1.  - 1.
    2.    3.  - 1.
```

Calculamos el rango de la matriz ampliada y la matriz de coeficientes con el comando rank( )

```
-->rank(AB)
 ans  =
    3.
-->rank(A)
 ans  =
    3.
```

Como $\rho(A|B) = \rho(A) = 3$ entonces conforme al Teorema del Rango tenemos solución única y la obtenemos directamente de la "La matriz escala reducida por filas $E_{(A|B)}$", la cual la conseguimos con el comando rref().

```
-->rref(AB)
 ans  =
    1.    0.    0.    1.5
    0.    1.    0.  - 1.375
    0.    0.    1.    0.875
```

Así que la solución es:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ \\ -1.375 \\ \\ 0.875 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado haciendo lo siguiente.

```
-->X=[1.5;-1.375;0.875]
 X  =
    1.5
  - 1.375
    0.875

-->A*X
 ans  =
    1.
```

Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & 6t & = & 3 \\ & & y & - & z & + & 3t & = & -2 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & + & 4t & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 4z & + & 7t & = & 5 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Con lo aprendido podemos intentar mejorar el comportamiento de la técnica, en el siguiente sentido:

```
-->AB=[1 1 1 2 1;2 1 3 6 3;0 1 -1 3 -2;2 2 2 4 2;2 1 4 7 5];


-->A=[1 1 1 2 ;2 1  3  6 ;0 1  -1  3 ;2 2 2  4 ;2 1 4 7 ];

-->rref(AB)

 ans  =

    1.    0.    0.    0.  - 1.6
    0.    1.    0.    0.    0.8
    0.    0.    1.    0.    2.2
    0.    0.    0.    1.  - 0.2
    0.    0.    0.    0.    0.
```

Así que la solución es única y es de la forma:

```
-->X=[-1.6;0.8;2.2;-0.2]

 X  =

  - 1.6
    0.8
    2.2
  - 0.2
```

Y podemos comprobar directamente que

```
-->A*X

 ans  =

    1.
    3.
  - 2.
    2.
    5.
```

Resolvamos ahora, el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcr|} x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Ya sabemos como proceder, es decir hacemos lo siguiente:

```
-->AB=[1 1 -2 2;1 1 1 1;2 2 -1 0];


-->A=[1 1 -2 ;1 1 1 ;2 2 -1 ];

-->rref(AB)
 ans  =

    1.    1.    0.    0.
    0.    0.    1.    0.
    0.    0.    0.    1.
```

Concluimos que no hay solución, pues $\rho(A) = 2 < \rho(A|B) = 3$**. En particular observamos que** $\det(A) = 0$**.**

Aplicaciones: Dependencia e independencia lineal

Queda claro que una buena interpretación del Teorema del Rango permite genuinas aplicaciones. Por ejemplo: Si

$$\alpha \;=\; \{(1,2,-1),(-3,5,7),(4,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

entonces ¿α es una base de $\mathbb{R}^3$?

Observamos en primer lugar que como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$ entonces basta que α sea linealmente independiente, y entonces podemos reducir el problema a estudiar $\det(A)$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

En segundo lugar, procedemos con Scilab

```
-->rank(A)
 ans  =

    3.
```

O bien,

```
-->A=[1 -3 4;2 5 -1;-1 7 1]
 A  =

    1.  - 3.    4.
    2.    5.  - 1.
  - 1.    7.    1.

-->det(A)
 ans  =

    91.
```

O bien

```
-->rref(A)

 ans  =

    1.    0.    0.
    0.    1.    0.
    0.    0.    1.
```

Finalmente, el Teorema del rango dice solución única y entonces α es una base

Una Solución de la Pep 1 y Comprobación con Scilab

1. **Dadas las matrices:**
   - $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 1)$
   - I_4 **matriz identidad de orden** 4
   - $A = I_4 - \frac{1}{4}(U \cdot U^t)$, **donde** U^t **significa la matriz traspuesta de** U.

   entonces

   (a) **Demuestre que** A **es una matriz simétrica, es decir** $A = A^t$
   Solución, observamos que una alternativa es por ejemplo, usar propiedades de las matrices simétricas y entonces tenemos que:

$$A^t \;=\; (I_4 - \frac{1}{4}U \cdot U^t)^t = I_4^t - \left(\frac{1}{4}U \cdot U^t\right)^t = I_4 - \frac{1}{4}\left((U^t)^t \cdot U^t\right) = I_4 - \frac{1}{4}\left(U \cdot U^t\right) = A$$

   Otra alternativa es calcular directamente usando la operatoria de matrices, y en este caso obtenemos que:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

   Luego, A **es simétrica**

Solución usando Scilab

```
-->U=ones(4,1)
 U  =
    1.
    1.
    1.
    1.
-->A=eye(4,4)-(1/4)*(U*U')
 A  =
    0.75  - 0.25  - 0.25  - 0.25
  - 0.25    0.75  - 0.25  - 0.25
  - 0.25  - 0.25    0.75  - 0.25
  - 0.25  - 0.25  - 0.25    0.75
-->A'
 ans  =
    0.75  - 0.25  - 0.25  - 0.25
  - 0.25    0.75  - 0.25  - 0.25
  - 0.25  - 0.25    0.75  - 0.25
  - 0.25  - 0.25  - 0.25    0.75
```

(b) **Calcule** $Tr(A)$**, donde** $Tr(A)$ **representa a la traza de la matriz** A**, es decir si** $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(s)$ **entonces** $Tr(B) = \sum_{i=1}^{s} b_{ii}$

Solución. Directamente tenemos que $Tr(A) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 3$ **Solución usando Scilab**

```
-->trace(A)
 ans  =
    3.
```

2. **Si** $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ **entonces determine el conjunto**

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Solución en este caso procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
x \in \mathbb{S} &\iff x \in \mathbb{R} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \iff x \in \mathbb{R} \wedge |A| = 0 \iff x \in \mathbb{R} \wedge \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff x \in \mathbb{R} \wedge \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1-x^4 & x-x^6 & x^2-x^9 \\ 0 & 0 & 1-x^4 & x-x^6 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x^4 \end{vmatrix} = 0 \iff x \in \mathbb{R} \wedge (1-x^4) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1-x^4 & x-x^6 \\ 0 & 0 & 1-x^4 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff x \in \mathbb{R} \wedge (1-x^4)^2 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1-x^4 \end{vmatrix} = 0 \iff x \in \mathbb{R} \wedge (1-x^4)^3 = 0 \\
&\iff x \in \mathbb{R} \wedge ((1-x^2)(1+x^2))^3 = 0 \iff x \in \mathbb{R} \wedge ((1-x)(1+x))^3((1+x^2)^3 = 0 \\
&\iff x \in \mathbb{R} \wedge (1-x) = 0 \wedge (1+x) = 0, \textbf{(Pues, } (1+x^2) \neq 0 \ (\forall x; x \in \mathbb{R}))
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{S} \ = \ \{-1, 1\}$$

Comprobamos Usando Scilab

- **Para** $x = 1$

```
-->A=ones(4,4)
 A  =
    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.
    1.    1.    1.    1.

-->det(A)
 ans  =
    0.
```

- **Para** $x = -1$

```
-->A=[1 -1 1 -1;-1 1 -1 1;1 -1 1 -1;-1 1 -1 1]
 A  =

    1.  - 1.    1.  - 1.
  - 1.    1.  - 1.    1.
    1.  - 1.    1.  - 1.
  - 1.    1.  - 1.    1.

-->det(A)
 ans  =

    0.
```

3. **Dado el sistema de ecuaciones lineales**

$$\left.\begin{array}{rcl} (a+1)x+y+z &=& a^2+3a \\ x+(a+1)y+z &=& a^3+3a^2 \\ x+y+(a+1)z &=& a^4+3a^3 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene solución única } \}$$

Solución, debemos determinar el conjunto $\mathbb{S}$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{S} &\iff a \in \mathbb{R} \wedge (*) \text{ tiene solución única} \\ &\iff a \in \mathbb{R} \wedge \rho \begin{pmatrix} (a+1) & 1 & 1 \\ 1 & (a+1) & 1 \\ 1 & 1 & (a+1) \end{pmatrix} = \rho \left(\begin{array}{ccc|c} (a+1) & 1 & 1 & a^2+3a \\ 1 & (a+1) & 1 & a^3+3a^2 \\ 1 & 1 & (a+1) & a^4+3a^3 \end{array}\right) = 3 \quad (*) \end{aligned}$$

Así que, aplicamos el teorema del rango y obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (A|B) &= \left(\begin{array}{ccc|c} (a+1) & 1 & 1 & a^2+3a \\ 1 & (a+1) & 1 & a^3+3a^2 \\ 1 & 1 & (a+1) & a^4+3a^3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -a & -a^2-2a & -a^5-4a^4-3a^3+a^2+3a \\ 0 & a & -a & -a^4-2a^3+3a^2 \\ 1 & 1 & (a+1) & a^4+3a^3 \end{array}\right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (a+1) & a^4+3a^3 \\ 0 & a & -a & -a^4-2a^3+3a^2 \\ 0 & -a & -a^2-2a & -a^5-4a^4-3a^3+a^2+3a \end{array}\right) \qquad (**) \end{aligned}$$

Si $a = 0$ **entonces de** $(**)$ **sigue que** $\rho(A) = \rho(A|B) = 1$ **y** $0 \notin \mathbb{S}$.
Si $a \neq 0$ **entonces**

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (a+1) & a^4+3a^3 \\ 0 & 1 & -1 & -a^3-2a^2+3a \\ 0 & 1 & a+2 & a^4+4a^3+3a^2-a-3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & (a+2) & a^4+4a^3+2a^2-3a \\ 0 & 1 & -1 & -a^3-2a^2+3a \\ 0 & 0 & a+3 & a^4+3a^3+a^2+2a-3 \end{array}\right) \qquad (***)$$

Además, Si $a+3=0$ **entonces de** $(***)$ **sigue que** $\rho(A) = \rho(A|B) < 3$ **y** $-3 \notin \mathbb{S}$
Si $a+3 \neq 0$ **entonces de** $(***)$ **sigue que** $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$**, por tanto**

$$\mathbb{S} = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$$

Comprobamos usando Scilab y las herramientas matemáticas pertinentes:

- **Para** $a = -3$

```
-->AB=[-2 1 1 0;1 -2 1 0;1 1 -2 0]
 AB  =


  - 2.    1.    1.    0.
    1.  - 2.    1.    0.
    1.    1.  - 2.    0.

-->rref(AB)
 ans  =


    1.    0.  - 1.    0.
    0.    1.  - 1.    0.
    0.    0.    0.    0.
```

O bien,

```
-->rank(AB)
 ans  =
    2.
```

- **Para** $a = 0$

```
-->AB=[1 1 1 0;1 1 1 0;1 1 1 0]
 AB  =

    1.    1.    1.    0.
    1.    1.    1.    0.
    1.    1.    1.    0.

-->rref(AB)
 ans  =

    1.    1.    1.    0.
    0.    0.    0.    0.
    0.    0.    0.    0.
```

O bien

```
-->rank(AB)
 ans  =
    1.
```

4. **Demuestre que** $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 3y + 4z - t = 0 \wedge 2x - y + z + 2t = 0\} \leq \mathbb{R}^4$**, es decir demuestre que** $\mathbb{W}$ **es un subespacio de** $\mathbb{R}^4$

Solución, observamos que $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 0 = 0 \wedge 2 \cdot 0 - 0 + 0 + 2 \cdot 0 = 0$**, Así que** $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{W}$ **y** $\mathbb{W} \neq \emptyset$

Además, si usamos por ejemplo, la técnica de los generadores obtenemos que:

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ x + 3y + 4z - t = 0 \wedge 2x - y + z + 2t = 0 \\ &\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ \left.\begin{array}{rcl} x + 3y + 4z - t &=& 0 \\ 2x - y + z + 2t &=& 0 \end{array}\right| \qquad (**) \end{aligned}$$

Ahora podemos, pore ejemplo aplicar el teorema del rango para resolver el sistema $(**)$ **y en consecuencia procedemos como sigue:**

$$\begin{aligned} (A|B) \ &= \ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} (l_2 \to l_2 - 2l_1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & 4 \end{pmatrix} l_2 \to -\frac{1}{7} l_2 \\ & \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} (l_1 \to l_1 - 3l_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, $x = -z - \frac{5}{7}t$ **y** $y = -z + \frac{4}{7}t$ **y sustituyendo en** $(**)$ **tenemos que**

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ x + 3y + 4z - t = 0 \wedge 2x - y + z + 2t = 0 \\ &\iff u = \left(-z - \frac{5}{7}t, -z + \frac{4}{7}t, z, t\right); \ z \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \\ &\iff u = (-z, -z, z, 0) + \left(-\frac{5}{7}t, \frac{4}{7}t, 0, t\right); \ z \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \\ &\iff u = z\,(-1, -1, 1, 0) + t\left(-\frac{5}{7}, \frac{4}{7}, 0, 1\right); \ z \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Así que

$$\mathbb{W} \;=\; \left\langle \left\{ (-1,-1,1,0)\,, \left(-\frac{5}{7}, \frac{4}{7}, 0, 1\right) \right\} \right\rangle \leq \mathbb{R}^4$$

Por supuesto que debemos comprobar y en tal caso obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} -1-3+4 &=& 0 \\ -2+1+1 &=& 0 \end{array} \wedge \begin{array}{rcl} -\frac{5}{7}+\frac{12}{7}-1 &=& 0 \\ -\frac{10}{7}-\frac{4}{7}+2 &=& 0 \end{array}$$

Una solución con Scilab

```
-->AB=[1 3 4 -1;2 -1 1 2]
 AB  =

    1.     3.     4.  - 1.
    2.   - 1.     1.    2.

-->rref(AB)
 ans  =

    1.     0.     1.    0.7142857
    0.     1.     1.  - 0.5714286
```