Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Álgebra II Módulo Básico de Ingeniería

Ejercicios Resueltos: Determinante y Matriz Inversa

Profesor Ricardo Santander Baeza

Viernes 06 de noviembre del 2015

El trabajo persistente caracteriza al "Usachino"

(1) Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ y $\mathbb{S} = \{a \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{S} \neq \emptyset$

Solución

$$a \in \mathbb{S} \iff a \in \mathbb{R} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \iff a \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0 :$$

De acuerdo a nuestras propiedades, si $a = 1$ entonces $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Así que $1 \in \mathbb{S}$ y $\mathbb{S} \neq \emptyset$

(b) Determine explícitamente $\mathbb{S}$

Solución

$$a \in \mathbb{S} \iff a \in \mathbb{R} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \iff a \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0$$

Así que, debemos calcular $\det(A)$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} = -(1-a)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -(1-a)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & 2+a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -(1-a)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2+a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -(1-a)^3(3+a)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
a \in \mathbb{S} &\iff a \in \mathbb{R} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \iff a \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0 \\
&\iff a \in \mathbb{R} \wedge -(1-a)^3(3+a) = 0 \\
&\iff a \in \mathbb{R} \wedge (a-1)^3 = 0 \vee (3+a) = 0
\end{aligned}$$

Entonces $\mathbb{S} = \{-3, 1\}$

(2) Si $A = \begin{pmatrix} 1+a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & 1+a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & 1+a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & 1+a^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ tal que $a \neq 1$ entonces demuestre que

$$\det(A) \quad = \quad \frac{a^5-1}{a-1}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\det(A) &= det \begin{pmatrix} 1+a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & 1+a^2 & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & 1+a^3 & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & 1+a^4 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & a^2 & a^3 & 1+a^4 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & a^2 & a^3 & 1+a+a^4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a^2 & a^3 & 1+a+a^4 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a^3 & 1+a+a^2+a^4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a^3 & 1+a+a^2+a^4 \end{pmatrix} \\
&= 1+a+a^2+a^3+a^4 = \frac{a^5-1}{a-1}
\end{aligned}$$

(3) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $A = -A^t$, es decir A es antisimétrica. Demuestre que

$$n \text{ impar } \Longrightarrow A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$$

Solución

$$\begin{aligned}
A = -A^t \quad &\Longrightarrow \quad \det(A) = \det(-A^t) \\
&\Longrightarrow \quad \det(A) = (-1)^n \det(A^t) \\
&\overset{\text{n impar}}{\Longrightarrow} \quad \det(A) = -\det(A) \\
&\Longrightarrow \quad \det(A) = 0
\end{aligned}$$

(4) Si $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ tal que $A^2 = A$ entonces determine $\det(A)$

Solución

$$\begin{aligned}
A^2 = A \quad &\Longrightarrow \quad \det(A^2) = \det(A) \\
&\Longrightarrow \quad (\det(A))^2 = \det(A) \\
&\Longrightarrow \quad (\det(A))^2 - \det(A) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \det(A)(\det(A) - 1) = 0
\end{aligned}$$

Como, $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ entonces $\det(A) \neq 0$ y luego, $\det(A) = 1$

(5) Si $A = \begin{pmatrix} (3-2\lambda) & (2\lambda+4) & (2\lambda+11) \\ (2-2\lambda) & (2+2\lambda) & (8+2\lambda) \\ (6-4\lambda) & (8+4\lambda) & (22+4\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))\}$$

Solución. Usamos la técnica usual para determinar los elementos del conjunto $\mathbb{S}$, es decir.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{S} &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge\ A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)) \\ &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge\ \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

Luego, queda claro que del cálculo del determinante, depende el conocer los elementos del conjunto en cuestión. Así que procedemos en consecuencia:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} (3-2\lambda) & (2\lambda+4) & (2\lambda+11) \\ (2-2\lambda) & (2+2\lambda) & (8+2\lambda) \\ (6-4\lambda) & (8+4\lambda) & (22+4\lambda) \end{pmatrix} \\ &= 2\det\begin{pmatrix} (3-2\lambda) & (2\lambda+4) & (2\lambda+11) \\ (2-2\lambda) & (2+2\lambda) & (8+2\lambda) \\ (3-2\lambda) & (4+2\lambda) & (11+2\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{(2 filas iguales)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $\det(A) = 0 \quad (\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$. Por tanto no existe un tal $\lambda \in \mathbb{R}$ que consiga que $\det(A) \neq 0$ y esto significa que

$$\mathbb{S} \;=\; \emptyset$$

(6) Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$, $D \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ y $Q \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3))$ tal que $A = Q^{-1} \cdot D \cdot Q$ entonces demuestre que

(a) $A^3 = Q^{-1} \cdot D^3 \cdot Q$

Solución

$$\begin{aligned} A^3 &= (Q^{-1} \cdot D \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot D \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot D \cdot Q) \\ &= Q^{-1} \cdot D \cdot QQ^{-1} \cdot D \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot D \cdot Q \\ &= Q^{-1} \cdot D \cdot I_3 \cdot D \cdot I_3 \cdot D \cdot Q \\ &= Q^{-1} \cdot D \cdot D \cdot D \cdot Q \\ &= Q^{-1} \cdot D^3 \cdot Q \end{aligned}$$

(b) $\det(A) = \det(D)$

Solución

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(Q^{-1} \cdot D \cdot Q) \\ &= \det(Q^{-1}) V \det(D) V \det(Q) \\ &= (\det(Q))^{-1} V \det(D) \cdot \det(Q) \\ &= \det(D) V (\det(Q))^{-1} V \det(Q) \\ &= \det(D) \cdot \frac{1}{\det(Q)} \cdot \det(Q) \\ &= \det(D) \end{aligned}$$

(7) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces demuestre que

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \wedge m \in \mathbb{N} \implies \det(adj(A^m) = (\det(A))^{mn-m}$$

Solución. Tenemos un resultado central en esta dirección, y este es el siguiente: $\forall B; B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, tenemos que vale la relación:

$$B \cdot Adj(B) = \det(B) \cdot I_n \qquad (*)$$

Así que, haciendo $B = A^m$ tenemos que

$$A^m \cdot Adj(A^m) = \det(A^m) \cdot I_n \qquad (**)$$

Luego, partiendo de $(**)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\det(A^m \cdot Adj(A^m)) = \det(\det(A^m) \cdot I_n) &\implies \det(A^m) \cdot \det(Adj(A^m)) = (\det(A^m))^n \\
&\implies (\det(A))^m \cdot \det(Adj(A^m)) = (\det(A))^{mn} \\
&\overset{\det(A)\neq 0}{\implies} \det(Adj(A^m)) = (\det(A))^{mn-m} \\
&\implies \det(Adj(A^m)) = (\det(A))^{m(n-1)}
\end{aligned}$$