

[1] Si consideramos el subespacio $W = \{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \mid 9z - 3x - 3y = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$ determine:

[a] P_W , la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ en W

Solución

En primer lugar, determinamos una base de W .

$$\begin{aligned}u \in W &\iff u = (x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \wedge 9z - 3x - 3y = 0 \\&\iff u = (x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \wedge x + y - 3z = 0 \\&\iff u = (x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \wedge y = 3z - x \\&\iff u = (x, 3z - x, t, z) \\&\iff u = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 3, 0, 1) + t(0, 0, 1, 0)\end{aligned}$$

Luego, $W = \langle \{(1, -1, 0, 0), (0, 3, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\} \rangle$. Así que $\dim_{\mathbb{R}}(W) \leq 3$, por tanto debemos verificar que $\alpha = \{(1, -1, 0, 0), (0, 3, 0, 1), (0, 0, 1, 0)\}$ es una base de W , y para ello sólo falta ver que es linealmente independiente. Es decir, debemos mostrar que

$$a_1(1, -1, 0, 0) + a_2(0, 3, 0, 1) + a_3(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0) \implies a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned}a_1(1, -1, 0, 0) + a_2(0, 3, 0, 1) + a_3(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0) &\implies (a_1, 3a_2 - a_1, a_3, a_2) = (0, 0, 0, 0) \\&\implies a_1 = a_2 = a_3 = 0\end{aligned}$$

Por tanto α es una base de W .

A seguir verificamos si α es una base ortogonal, respecto del producto interno usual.

$$\begin{aligned}\langle (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle &= 0 \\ \langle (1, -1, 0, 0), (0, 3, 0, 1) \rangle &= -3 \\ \langle (0, 3, 0, 1), (0, 0, 1, 0) \rangle &= 0\end{aligned}$$

Luego, α no es una base ortogonal, así que la ortogonalizamos vía G-S.

$$\begin{aligned}v'_1 &= (1, -1, 0, 0) \\ v'_2 &= (0, 0, 1, 0) \\ v'_3 &= (0, 3, 0, 1) - \frac{\langle (0, 3, 0, 1), (0, 0, 1, 0) \rangle}{\langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle} (0, 0, 1, 0) - \frac{\langle (0, 3, 0, 1), (1, -1, 0, 0) \rangle}{\langle (1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 0) \rangle} (1, -1, 0, 0) \\ &= (0, 3, 0, 1) + \frac{3}{2} (1, -1, 0, 0) \\ &= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 1 \right)\end{aligned}$$

Luego formamos la base ortogonal $\alpha' = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (3, 3, 0, 2)\}$.

¹Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

Finalmente procedemos a calcular la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre W . Es decir $P_W : \mathbb{R}^4 \mapsto W$ tal que $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mapsto P_W(a, b, c, d) \in W$

$$\begin{aligned}
P_w(a, b, c, d) &= \frac{\langle (a, b, c, d), (1, -1, 0, 0) \rangle}{\langle (1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 0) \rangle} (1, -1, 0, 0) + \frac{\langle (a, b, c, d), (0, 0, 1, 0) \rangle}{\langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0) \rangle} (0, 0, 1, 0) + \\
&\quad \frac{\langle (a, b, c, d), (3, 3, 0, 2) \rangle}{\langle (3, 3, 0, 2), (3, 3, 0, 2) \rangle} (3, 3, 0, 2) \\
&= \left(\frac{a-b}{2} \right) (1, -1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + \left(\frac{3a+3b+2d}{22} \right) (3, 3, 0, 2) \\
&= \left(\frac{a-b}{2} + \frac{9a+9b+6d}{22}, \frac{b-a}{2} + \frac{9a+9b+6d}{22}, c, \frac{3a+3b+2d}{11} \right) \\
&= \left(\frac{11a-11b+9a+9b+6d}{22}, \frac{11b-11a+9a+9b+6d}{22}, c, \frac{3a+3b+2d}{11} \right) \\
&= \left(\frac{20a-2b+6d}{22}, \frac{20b-2a+6d}{22}, c, \frac{3a+3b+2d}{11} \right) \\
&= \left(\frac{10a-b+3d}{11}, \frac{10b-a+3d}{11}, c, \frac{3a+3b+2d}{11} \right)
\end{aligned}$$

Para nuestra tranquilidad, podemos comprobar la validez de nuestro trabajo, usando las propiedades conocidas.

$$P_w(1, -1, 0, 0) = \left(\frac{10+1}{11}, \frac{-10-1}{11}, 0, \frac{3-3}{11} \right) = (1, -1, 0, 0) \text{ ok}$$

[b] $d((x, y, z, t), \mathbb{W})$, la distancia de un vector de $\mathbb{R}^4$ al subespacio $\mathbb{W}$

Solución

Sabemos que $d((x, y, z, t), W) = \|(x, y, z, t) - P_w(x, y, z, t)\|$. Así que en consecuencia hacemos los cálculos

$$\begin{aligned}
\|(x, y, z, t) - P_w(x, y, z, t)\| &= \left\| (x, y, z, t) - \left(\frac{10x-y+3t}{11}, \frac{10y-x+3t}{11}, z, \frac{3x+3y+2t}{11} \right) \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{11x-10x+y-3t}{11}, \frac{11y-10y+x-3t}{11}, 0, \frac{11t-3x-3y-2t}{11} \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{x+y-3t}{11}, \frac{y+x-3t}{11}, 0, \frac{9t-3x-3y}{11} \right\| \\
&= \left\| \frac{x+y-3t}{11}, \frac{y+x-3t}{11}, 0, \frac{-3(x+y-3t)}{11} \right\|
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
d((x, y, z, t), W) &= \sqrt{\left(\left[\frac{x+y-3t}{11} \right]^2 + \left[\frac{y+x-3t}{11} \right]^2 + \left[\frac{-3(x+y-3t)}{11} \right]^2 \right)} \\
&= \sqrt{\left(\left[\frac{x+y-3t}{11} \right]^2 + \left[\frac{y+x-3t}{11} \right]^2 + 9 \left[\frac{x+y-3t}{11} \right]^2 \right)} \\
&= \sqrt{11 \left[\frac{x+y-3t}{11} \right]^2}
\end{aligned}$$

Podemos como antes, en base a nuestras propiedades, comprobar nuestro resultado:

$$d((1, -1, 0, 0), W) = \sqrt{11 \left[\frac{1-1-0}{11} \right]^2} = 0 \quad (ok)$$

[c] $\mathbb{W}^\perp$, el complemento ortogonal de $\mathbb{W}$

Solución

Sabemos que en concordancia con nuestros resultados que para determinar $W^\perp$ basta anular a los elementos de una base de W . Así que procedemos en conformidad.

$$\begin{aligned}
 u \in W^\perp &\iff u \in \mathbb{R}^4 \wedge \langle u, (1, -1, 0, 0) \rangle = 0 \wedge \langle u, (0, 0, 1, 0) \rangle = 0 \wedge \langle u, (3, 3, 0, 2) \rangle = 0 \\
 &\iff u = (x, y, z, t) \wedge \langle (x, y, z, t), (1, -1, 0, 0) \rangle = 0 \wedge \langle (x, y, z, t), (0, 0, 1, 0) \rangle = 0 \wedge \langle (x, y, z, t), (3, 3, 0, 2) \rangle = 0 \\
 &\iff u = (x, y, z, t) \wedge x - y = 0 \wedge z = 0 \wedge 3x + 3y + 2t = 0 \\
 &\iff u = (x, y, z, t) \wedge x = y \wedge z = 0 \wedge t = -3x \\
 &\iff u = (x, x, 0, -3x) \\
 &\iff u = x(1, 1, 0, -3)
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$W^\perp = \langle (1, 1, 0, -3) \rangle$$

Y verificamos directamente que $\beta = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (3, 3, 0, 2), (1, 1, 0, -3)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$

[2] Si $T : \mathbb{R}_2[x] \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1 - a_2, a_0 - a_1, a_1 - a_2)$ entonces demuestre que T es un isomorfismo

Solución

[a] Por demostrar que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$

En primer lugar, si $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces mostramos que $T(p(x) + q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$

$$\left. \begin{aligned} p(x) \in \mathbb{R}_2[x] &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ q(x) \in \mathbb{R}_2[x] &\iff q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

Así que

$$\begin{aligned}
 T(p(x) + q(x)) &= T((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\
 &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2), (a_0 + b_0) - (a_1 + b_1), (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2)) \\
 &= (a_0 + b_0 + a_1 + b_1 - a_2 - b_2, a_0 + b_0 - a_1 - b_1, a_1 + b_1 - a_2 - b_2) \\
 &= (a_0 + a_1 - a_2, a_0 - a_1, a_1 - a_2) + (b_0 + b_1 - b_2, b_0 - b_1, b_1 - b_2) \\
 &= T(a_0 + a_1x + a_2x^2) + T(b_0 + b_1x + b_2x^2) \\
 &= T(p(x)) + T(q(x))
 \end{aligned}$$

En segundo lugar, si $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces mostramos que $T(\lambda p(x)) = \lambda T(p(x))$.

En efecto

$$\begin{aligned}
 T(\lambda p(x)) &= T(\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2)) \\
 &= T((\lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2)) \\
 &= (\lambda a_0 + \lambda a_1 - \lambda a_2, \lambda a_0 - \lambda a_1, \lambda a_1 - \lambda a_2) \\
 &= (\lambda(a_0 + a_1 - a_2), \lambda(a_0 - a_1), \lambda(a_1 - a_2)) \\
 &= \lambda(a_0 + a_1 - a_2, a_0 - a_1, a_1 - a_2) \\
 &= \lambda T(a_0 + a_1x + a_2x^2) \\
 &= \lambda T(p(x))
 \end{aligned}$$

Luego, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$

[b] Ahora, sabemos que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ será un isomorfismo si es una función inyectiva y sobreyectiva, pero como la dimensión de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$ es 3 entonces como consecuencia del teorema de la dimensión tenemos que T ser inyectiva es equivalente a T ser sobreyectiva.!!!

Además como $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ entonces ser inyectiva es equivalente a que su núcleo ($\ker$), sea el subespacio nulo, e.e. $\ker(T) = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$.!!!
Entonces estudiemos $\ker(T)$.

$$\begin{aligned}
p(x) \in \ker(T) &\iff p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(p(x)) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (0, 0, 0) \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (a_0 + a_1 - a_2, a_0 - a_1, a_1 - a_2) = (0, 0, 0) \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge \left. \begin{array}{l} a_0 + a_1 - a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{array} \right\} \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_0 = a_1 = a_2 \wedge a_0 + a_0 - a_0 = 0 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_0 = a_1 = a_2 = 0 \\
&\iff p(x) = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff p(x) \in \{0 + 0x + 0x^2\}
\end{aligned}$$

Luego, $\ker(T) = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$ y T es inyectiva y por tanto sobreyectiva y es un isomorfismo.

Tenemos una demostración alternativa, que es la siguiente:

Como $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ entonces es posible representar T en forma matricial, como sigue.

$$[T]_{pol(2)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} [T(1)]_{c(3)} & [T(x)]_{c(3)} & [T(x^2)]_{c(3)} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3) \quad (1)$$

En general tenemos por definición de T que

$$\begin{aligned}
T(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2) &= (a_0 + a_1 - a_2, a_0 - a_1, a_1 - a_2) \\
&= (a_0 + a_1 - a_2)(1, 0, 0) + (a_0 - a_1)(0, 1, 0) + (a_1 - a_2)(0, 0, 1)
\end{aligned}$$

Luego,

$$[T(a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2)]_{pol(2)} = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1 - a_2) \\ (a_0 - a_1) \\ (a_1 - a_2) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Así que, aplicando (2) obtenemos que

$$\begin{aligned}
[T(1)]_{pol(2)} &= [T(1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2)]_{pol(2)} = \begin{pmatrix} (1 + 0 - 0) \\ (1 - 0) \\ (0 - 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
[T(x)]_{pol(2)} &= [T(0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2)]_{pol(2)} = \begin{pmatrix} (0 + 1 - 0) \\ (0 - 1) \\ (1 - 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
[T(x^2)]_{pol(2)} &= [T(0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2)]_{pol(2)} = \begin{pmatrix} (0 + 0 - 1) \\ (0 - 0) \\ (0 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando (3) en (1) obtenemos que

$$[T]_{pol(2)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Finalmente, usando esta técnica T será un isomorfismo si y sólo si $\det([T]_{pol(2)}^{c(3)}) \neq 0$. Así que calculamos el determinante a (4).

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Así que T es un isomorfismo

[3] Sea $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$. Determine, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1))$ tal que

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución

[a] Debemos determinar $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1))$ tal que $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, en particular debemos determinar

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ para cada } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1).$$

[b] Ahora, gestionamos la información:

[i] Sabemos que $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

[ii] Pero, por definición $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \left(\left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} \right) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$

[iii] Así que, juntando la información de los ítemes anteriores obtenemos que

$$\left(\left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

De donde sigue que

$$\begin{aligned} \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \iff T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \iff T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[iv] Además como α es base entonces tiene solución única la ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e.e. tiene solución única el sistema

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + a_3 & = & x \\ a_2 + a_3 & = & y \\ a_3 & = & z \end{array} \implies a_3 = z \wedge a_2 = y - z \wedge a_1 = x - y$$

Entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \\ T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (x - y) T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - z) T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \\ T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (x - y) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - z) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \\ T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4y - 4z \\ 6y - x - 5z \\ 2y - 4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos finalmente verificar que:

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \\ 6 \cdot 0 - 1 - 5 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \\ 6 \cdot 1 - 1 - 5 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \\ 6 \cdot 1 - 1 - 5 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[4] Determine (si es posible) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

[a] $(\mathbb{R}_2[x])_0 = \langle \{1 - x\} \rangle$

[b] $(\mathbb{R}_2[x])_1 = \langle \{1 + x, x^2, 1 + x + x^2\} \rangle$

Solución

[a] Debemos determinar, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$, sujeta a las condiciones de encima. e.e debemos determinar $T(p(x))$ para $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$

[b] Gestionando la información tenemos que

[i] Por definición

$$1 - x \in (\mathbb{R}_2[x])_0 \iff (1 - x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(1 - x) = 0(1 - x) = 0 + 0x + 0x^2$$

[ii] Como $1 + x + x^2 = 1 \cdot (1 + x) + x^2$ entonces $\{1 + x, x^2, 1 + x + x^2\}$ es un conjunto linealmente dependiente y por tanto tenemos por ejemplo que:

$$(\mathbb{R}_2[x])_1 = \langle \{1 + x, x^2\} \rangle$$

Además

$$\begin{aligned} 1+x \in (\mathbb{R}_2[x])_1 &\iff (1+x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(1+x) = 1 \cdot (1-x) = 1+x \\ x^2 \in (\mathbb{R}_2[x])_1 &\iff x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(x^2) = 1 \cdot x^2 = x^2 \end{aligned}$$

- [iii] Si $\alpha = \{1-x, 1+x, x^2\}$ genera $\mathbb{R}_2[x]$ entonces es una base de $\mathbb{R}_2[x]$ ya que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x]) = 3$
 Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ entonces

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = c_1(1-x) + c_2(1+x) + c_3x^2 = (c_1 + c_2) + (c_2 - c_1)x + c_3x^2$$

Luego,

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & a_0 \\ -c_1 + c_2 & = & a_1 \\ c_3 & = & a_2 \end{array} \right\} \implies c_3 = a_2 \wedge c_2 = \frac{a_0 + a_1}{2} \wedge c_1 = \frac{a_0 - a_1}{2}$$

Por tanto

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = \frac{a_0 - a_1}{2}(1-x) + \frac{a_0 + a_1}{2}(1+x) + a_2x^2 \quad (5)$$

Finalmente, construimos T usando (5)

$$\begin{aligned} T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= \frac{a_0 - a_1}{2}T(1-x) + \frac{a_0 + a_1}{2}T(1+x) + a_2Tx^2 \\ &= \frac{a_0 + a_1}{2}(1+x) + a_2x^2 \\ &= \left(\frac{a_0 + a_1}{2}\right) + \left(\frac{a_0 + a_1}{2}\right)x + a_2x^2 \end{aligned}$$

Si comprobamos tenemos que:

$$\begin{aligned} T(1-x) &= \left(\frac{1-1}{2}\right) + \left(\frac{1-1}{2}\right)x + 0x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ T(1+x) &= \left(\frac{1+1}{2}\right) + \left(\frac{1+1}{2}\right)x + 0x^2 = 1 + x \\ T(x^2) &= \left(\frac{0+0}{2}\right) + \left(\frac{0+0}{2}\right)x + 1x^2 = x^2 \end{aligned}$$