Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 3
Profesor Ricardo Santander Baeza
19 de Octubre del 2009

[1] Si $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}$ entonces

[a] Demuestre que $(a = b) \vee (a = c) \vee (b = c) \vee (a = b = c) \Longrightarrow (a + b\,\omega + c\,\omega^2)^3 = \overline{(a + b\,\omega + c\,\omega^2)^3}$

Solución

Etapa 1. Debemos verificar que

$$(a = b) \vee (a = c) \vee (b = c) \vee (a = b = c) \Longrightarrow (a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 = \overline{(a + b\,\omega + c\,\omega^2)^3}$$

Etapa 2. Gestión de la información

[i] Como $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}$ entonces $\omega^3 = 1$ y $\omega \neq 1$

[ii] En particular del punto anterior sigue que $1 + \omega + \omega^2 = 0$, pues

$$0 = \omega^3 - 1 = (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2)$$

[iii] Conforme al método de reducción obtenido encima, $\omega^2 = -1 - \omega$ tenemos que

$$a + b\,\alpha + c\,\alpha^2 = a + b\,\alpha + c(-1 - \alpha) = (a - c) + (b - c)\alpha$$

[iv] Luego, si aplicamos esos resultados obtenemos los casos:
Caso 1. Si $a = b$ entonces

$$\begin{aligned}
(a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 &= ((a - c) + (b - c)\alpha)^3 \\
&= ((a - c)(1 + \alpha))^3 \\
&= ((a - c)^3(-\alpha^2)^3 \qquad (\text{ Reducción}) \\
&= (c - a)^3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Caso 2. Si $a = c$ entonces

$$(a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 = ((a - c) + (b - c)\alpha)^3 = (b - c)\alpha)^3 = (b - c)^3 \in \mathbb{R}$$

Caso 3. Si $b = c$ entonces

$$(a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 = ((a - c) + (b - c)\alpha)^3 = (a - c)^3 \in \mathbb{R}$$

Caso 4. Si $a = b = c$ entonces

$$(a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 = ((a - c) + (b - c)\alpha)^3 = 0 \in \mathbb{R}$$

Luego, en todos los casos $(a + b\,\alpha + c\,\alpha^2)^3 \in \mathbb{R}$ y entonces

$$(a + b\,\omega + c\,\omega^2)^3 = \overline{(a + b\,\omega + c\,\omega^2)^3}$$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

[b] Demuestre que $(2+2\omega+5\omega^2)^6 = 729$

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que $(2+2\omega+5\omega^2)^6 = 729$

Etapa 2. Gestión de la información

Aplicando "reducción" tenemos que

$$(2+2\omega+5\omega^2)^6 = (2+2\omega+5(-1-\omega))^6 = (-3-3\omega)^6 = (-3)^6(1+\omega)^6 = 729(-\omega^2)^6 = 729(\omega^3)^4 = 729$$

Alternativa

$$(2+2\omega+5\omega^2)^6 = ((1+\omega+\omega^2)+(1+\omega+\omega^2)+3\omega^2)^6 = 3^6(\omega^3)^4 = 3^6 = 729$$

[2] Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcccccccc} -x_1 & + & (1+\lambda)x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & + & \lambda x_4 & = & 3 \\ \lambda x_1 & - & x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & + & \lambda x_4 & = & 2 \\ \lambda x_1 & + & \lambda x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & + & \lambda x_4 & = & 2 \\ \lambda x_1 & + & \lambda x_2 & + & (2-\lambda)x_3 & - & x_4 & = & 2 \end{array}\right| \qquad (1)$$

Determine el siguiente conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (1) \text{ no tiene solución}\}$$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar el conjunto $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (1) \text{ no tiene solución}\}$

Etapa 2. Gestión de la información

[a] El sistema lo lo escribimos en su notación matricial

$$\begin{pmatrix} -1 & 1+\lambda & 2-\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & 2-\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[b] Estudiamos la matriz ampliada asociada al sistema

$$\left(\begin{array}{rrrrcr} -1 & 1+\lambda & 2-\lambda & \lambda & | & 3 \\ \lambda & -1 & 2-\lambda & \lambda & | & 2 \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda & \lambda & | & 2 \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda & -1 & | & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_1 \to -l_1 \\ l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_2 \\ l_4 \to l_4 - l_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrcr} 1 & -(1+\lambda) & \lambda-2 & -\lambda & | & -3 \\ \lambda+1 & -(\lambda+2) & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+1) & | & 0 \end{array}\right)$$

En esta última matriz tenemos dos casos para considerar, uno cuando $\lambda = -1$ y otro cuando $\lambda = -2$.

Al hacer $\lambda = -1$, la matriz queda

$$\left(\begin{array}{rrrrcr} -1 & 0 & -3 & 1 & | & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{array}\right) \text{ El que siempre tiene solución.}$$

Ahora si $\lambda = -2$, la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ Con el cual, también siempre hay solución.

[c] Si operamos más la matriz anterior obtenemos

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -(1+\lambda) & \lambda-2 & -\lambda & -3 \\ \lambda+1 & -(\lambda+2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+1) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ l_1 \;\; \to l_1 + l_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & \lambda-2 & -\lambda & -3 \\ \lambda+1 & -(\lambda+2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+1) & 0 \end{array}\right)$$

Ahora para $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq -2$ obtenemos que la matriz se transforma en:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & \lambda-2 & -\lambda & -3 \\ \lambda+1 & -(\lambda+2) & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_2 \;\; \to l_2 - (\lambda+1)l_1 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & \lambda-2 & -\lambda & -3 \\ 0 & -(\lambda+2) & -(\lambda+1)(\lambda-2) & \lambda(\lambda+1) & 3\lambda+2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Si $\lambda = 2$ entonces tenemos que

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_2 \;\; \to l_2 + 4l_3 \\ l_2 \;\; \to l_2 - 6l_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, para $\lambda = 2$ el rango de la matriz de coeficientes es 3 y el de la matriz ampliada es 4, por tanto $S = \{2\}$

[3] Si definimos $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + 2a_1 - a_2 = 0\}$ entonces

[a] Muestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_3[x]$ y determine una base para $\mathbb{W}$

Etapa 1. Debemos verificar que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_3[x]$

Etapa 2. Gestión de la información

[i] En primer lugar, $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\wedge\; 0 + 2\cdot 0 - 0 = 0$. Así que $\mathbb{W} \neq \emptyset$

[ii] En Segundo lugar, buscamos un sistema de generadores para $\mathbb{W}$.

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\wedge\; a_0 + 2a_1 - a_2 = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\wedge\; a_2 = a_0 + 2a_1 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + (a_0 + 2a_1)x^2 + a_3x^3;\; a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_3 \in \mathbb{R} \\ &\iff p(x) = a_0(1 + x^2) + a_1(x + 2x^2) + a_3x^3;\; a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_3 \in \mathbb{R} \\ &\iff p(x) \in \left\langle \{1 + x^2, x + 2x^2, x^3\} \right\rangle \end{aligned}$$

Así que,

$$\mathbb{W} \;=\; \left\langle \{1 + x^2, x + 2x^2, x^3\} \right\rangle$$

Es decir, $\alpha = \{1 + x^2, x + 2x^2, x^3\}$ es un sistema de generadores para $\mathbb{W}$ y $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_3[x]$

[iii] Para que α sea una base basta que sea linealmente independiente, y para ello procedemos como sigue

$$\begin{aligned}
a_0(1+x^2)+a_1(x+2x^2)+a_3x^3=0_{\mathbb{R}_3[x]} &\Longrightarrow a_0+a_1x+(a_0+2a_1)x^2+a_3x^3=0+0x+0x^2+0x^3\\
&\Longrightarrow a_0=a_1=0\wedge(a_0+2a_1)=0\wedge a_3=0\\
&\Longrightarrow a_0=a_1=a_3=0
\end{aligned}$$

Por tanto, α es linealmente independiente y es una base para $\mathbb{W}$

[b] Demuestre que

$$\mathbb{W}+\mathbb{W}=\{p(x)+q(x)\mid p(x)\in\mathbb{W}\wedge q(x)\in\mathbb{W}\}\subset\mathbb{W}$$

Solución

Etapa 1. Debemos verificar que $\mathbb{W}+\mathbb{W}\subset\mathbb{W}$
Etapa 2. gestión de la información

Debemos recordar que si $\mathbb{W}$ es un subespacio entonces, verifica en particular, que

$$p(x)\in\mathbb{W}\wedge q(x)\in\mathbb{W}\Longrightarrow(p(x)+q(x))\in\mathbb{W}\qquad(*)$$

Así que

$$\begin{aligned}
u\in\mathbb{W}+\mathbb{W} &\Longleftrightarrow (\exists p(x);p(x)\in\mathbb{W})\wedge(\exists q(x);q(x)\in\mathbb{W})\ \text{tal que}\ u=p(x)+q(x)\\
&\Longrightarrow u=p(x)+q(x)\in\mathbb{W}\quad(\text{ Esto, sigue directamente de }(*))
\end{aligned}$$

[4] Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y $\alpha=\{p_1,p_2,p_3\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si definimos $\beta=\{q_1,q_2,q_3\}\subset\mathbb{V}$ tal que

$q_1=p_1+p_2\quad\wedge\quad q_2=p_1-p_2-3p_3\quad\wedge\quad q_3=-p_1+2p_3$ entonces

[a] Demuestre que β es una base de $\mathbb{V}$

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que β es una base de $\mathbb{V}$

Etapa 2. Gestión de la información

[i] Como $\alpha=\{p_1,p_2,p_3\}$ una base de $\mathbb{V}$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})=3$. Por tanto, para que β sea base de $\mathbb{V}$, basta mostrar que es un conjunto linealmente independiente ó que es un sistema de generadores. Mostremos que β, es un sistema de generadores (Nos servirá para responder la pregunta siguiente !!!)

Debemos entonces resolver para cada $u\in\mathbb{V}$, la ecuación

$$u=c_1q_1+c_2q_2+c_3q_3\qquad(*)$$

[ii] Pero, como α es una base entonces existen escalares a_1,a_2,a_3 tales que

$$u=a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3\qquad(**)$$

Pero, por definición de β tenemos que $(*)$ se escribe como:

$$\begin{aligned}
u &= c_1(p_1+p_2)+c_2(p_1-p_2-3p_3)+c_3(-p_1+2p_3)\\
&= (c_1+c_2-c_3)p_1+(c_1-c_2)p_2+(-3c_2+2c_3)p_3
\end{aligned}$$

De la unicidad de la representación de u en (**). sigue que debe verificarse simultáneamente que

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1+c_2-c_3 &=& a_1\\ c_1-c_2 &=& a_2\\ -3c_2+2c_3 &=& a_3 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$$

Escalonado la matriz ampliada asociada al sistema obtenemos que

$$\left(\begin{array}{rrrcc} 1 & 1 & -1 & | & a_1\\ 1 & -1 & 0 & | & a_2\\ 0 & -3 & 2 & | & a_3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{rrrcc} 1 & 0 & 0 & | & 2a_1-a_2+a_3\\ 0 & 1 & 0 & | & 2a_1-2a_2+a_3\\ 0 & 0 & 1 & | & 3a_1-3a_2+2a_3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1-a_2+a_3\\ 2a_1-2a_2+a_3\\ 3a_1-3a_2+2a_3\end{pmatrix}$$

Así que sustituyendo estos resultados en la representación de u en $(*)$ tenemos que:

$$u = (2a_1-a_2+a_3)q_1 + (2a_1-2a_2+a_3)q_2 + (3a_1-3a_2+2a_3)q_3 \qquad (***)$$

Por tanto, β genera $\mathbb{V}$ y entonces es una base.

[b] Determine $[I]_\alpha^\beta$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar la matriz cambio de base $[I]_\alpha^\beta$

Etapa 2. Gestión de la información

[i] Por definición tenemos que

$$[I]_\alpha^\beta = ([p_1]_\beta \quad [p_2]_\beta \quad [p_3]_\beta)$$

[ii] De $(***)$ y $(**)$, sigue que

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} 2a_1-a_2+a_3\\ 2a_1-2a_2+a_3\\ 3a_1-3a_2+2a_3\end{pmatrix} \Longleftrightarrow u = a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3$$

Luego, tenemos los casos:

$$p_1 = 1\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 0\cdot p_3 \Longrightarrow [p_1]_\beta = \begin{pmatrix} 2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$p_2 = 0\cdot p_1 + 1\cdot p_2 + 0\cdot p_3 \Longrightarrow [p_2]_\beta = \begin{pmatrix} -1\\ -2\\ -3\end{pmatrix}$$

$$p_3 = 0\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 1\cdot p_3 \Longrightarrow [p_3]_\beta = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

Luego

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

[c] Si $q = p_1+p_2+p_3$ entonces determine $[q]_\beta$

Solución

Etapa 1. debemos determinar $[q]_\beta$

Etapa 2. Gestión de la información

[i] Como $q = p_1 + p_2 + p_3$ entonces $[q]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

[ii] Conforme a la filosofía de la matriz cambio de base tenemos que

$$\begin{aligned} [q]_\beta &= [I]_\alpha^\beta [q]_\alpha \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$