Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 1
Profesor Ricardo Santander Baeza
25 de Mayo del 2009

[1] Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula

F(n) : ($2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ es divisible por 27), es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $F(1)$ es verdadera.

$$2^{2\cdot 1+1} - 9\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 2 = 8 - 9 + 3 - 2 = 0 = 27\cdot 0$$

Por tanto F(1) es verdadera

Etapa 2. Asumamos como hipótesis de inducción que para $k \in \mathbb{N}$, $F(k)$ es verdadera, es decir, existe λ tal que

$$2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2 = 27\cdot\lambda \tag{1}$$

Etapa 3. Por demostrar que $F(k+1)$ es verdadera, es decir que existe μ tal que

$$2^{2(k+1)+1} - 9(k+1)^2 + 3(k+1) - 2 = 27\cdot\mu \tag{2}$$

En efecto,

En primer lugar, de (2) sigue que:

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)+1} - 9(k+1)^2 + 3(k+1) - 2 &= 2^{2k+1+2} - 9(k^2+2k+1) + 3k + 3 - 2 \\ &= 4\cdot 2^{2k+1} - 9k^2 - 15k - 8 \end{aligned} \tag{3}$$

En segundo lugar, la expresión (3) la dividimos por $2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2$ y estudiamos su resto.

$$\begin{array}{rl} (4\cdot 2^{2k+1} - 9k^2 - 15k - 8) & \div\ (2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2) = 4 \\ \underline{-(4\cdot 2^{2k+1} - 36k^2 + 12k - 8)} & \\ 27k^2 - 27k & \end{array} \tag{4}$$

Luego, usando los resultados (2), (3), (1) y (4), sigue que

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)+1} - 9(k+1)^2 + 3(k+1) - 2 &= 4\cdot 2^{2k+1} - 9k^2 - 15k - 8 \\ &= 4(2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2) + 27k^2 - 27k \\ &= 4(27\cdot\lambda) + 27k^2 - 27k \\ &= 27(4\cdot\lambda + k^2 - k) \end{aligned}$$

Luego, $F(k+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

[2] Si en un progresión aritmética $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset (\mathbb{R} - \{0\})$ de diferencia d tenemos que

[a] $\{a_{n+1}, a_{n+1}, a_{r+1}\} \subset A$ forman una progresión geométrica y,

[b] $\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{r}\right\}$ forman una progresión aritmética

Entonces demuestre que $2a_1 + nd = 0$ y concluya que $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0$

Solución

Etapa 1. Debemos demostrar que $2a_1 + nd = 0$ y por tanto que $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \frac{n+1}{2}(2a_1 + nd) = 0$

Etapa 2. Gestión de la información

[a] Como $\{a_{m+1}, a_{n+1}, a_{r+1}\} \subset A$ y A es una progresión aritmética entonces debe suceder que $a_{m+1} = a_1 + md$, $a_{n+1} = a_1 + nd$ y $a_{r+1} = a_1 + rd$, es decir

$$\{a_{m+1}, a_{n+1}, a_{r+1}\} = \{a_1 + md, a_1 + nd, a_1 + rd\} \tag{5}$$

[b] Pero, $\{a_{m+1}, a_{n+1}, a_{r+1}\}$ también forman una progresión geométrica entonces conforme a (5), deben verificar la condición

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + nd}{a_1 + md} = \frac{a_1 + rd}{a_1 + nd} \quad &\Leftrightarrow \quad (a_1 + nd)^2 = (a_1 + md)(a_1 + rd) \\
&\Leftrightarrow \quad a_1^2 + 2a_1nd + n^2d^2 = a_1^2 + a_1rd + a_1md + mrd^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a_1nd + n^2d^2 = a_1rd + a_1md + mrd^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a_1n + n^2d = a_1r + a_1m + mrd \\
&\Leftrightarrow \quad (2n - r - m)a_1 = (mr - n^2)d \qquad (6)
\end{aligned}$$

[c] Además como $\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{r}\right\}$ forman una progresión aritmética entonces deben verificar que $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$, es decir

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{2}{n} = \frac{m+r}{mr} \Leftrightarrow mr = \frac{mn + rn}{2} \tag{7}$$

Sustituyendo el valor de mr obtenido en (7) en el mr obtenido en la relación (6) tenemos que:

$$\begin{aligned}
(2n - r - m)a_1 = \left(\frac{mn + rn}{2} - n^2\right) d \quad &\Longleftrightarrow \quad (2n - r - m)a_1 = \left(\frac{mn + rn - 2n^2}{2}\right) d \\
&\Longleftrightarrow \quad (2n - r - m)a_1 = \left(\frac{n(m + r - 2n)}{2}\right) d \\
&\Longleftrightarrow \quad (2n - r - m)a_1 = \left(\frac{n}{2}\right)(m + r - 2n)d \\
&\Longleftrightarrow \quad (2n - r - m)a_1 = -\left(\frac{n}{2}\right)(2n - m - r)d \\
&\Longrightarrow \quad a_1 = -\left(\frac{n}{2}\right) d \qquad (8)
\end{aligned}$$

Etapa 3. Finalmente de la condición (8) obtenemos que

$$2a_1 + nd = 0 \quad \wedge \quad S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\frac{n+1}{2}\right)(2a_1 + nd) = 0$$

[3] Si en el desarrollo binomial $(1+x)^s$ notamos C_r al coeficiente del término T_r y $A = \{m \mid C_{m+1} = C_{m+2}\}$ entonces demuestre que

$$A \neq \emptyset \Longrightarrow s \text{ es un número impar}$$

Solución

$$\begin{aligned}
m \in A &\iff C_{m+1} = C_{m+2} \iff \binom{s}{m} = \binom{s}{m+1} \\
&\iff \frac{s!}{m!(s-m)!} = \frac{s!}{(m+1)!(s-(m+1))!} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{m!(s-m)!} = \frac{1}{(m+1)!(s-(m+1))!} \\
&\Longrightarrow \frac{(m+1)!(s-(m+1))!}{m!(s-m)!} = 1 \\
&\Longrightarrow \frac{m!(m+1)(s-(m+1))!}{m!(s-(m+1))!(s-m)} = 1 \\
&\Longrightarrow \frac{(m+1)}{(s-m)} = 1 \\
&\Longrightarrow m+1 = s-m \\
&\Longrightarrow s = 2m+1
\end{aligned}$$

[4] Si llamamos $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$ y definimos en $\mathbb{R}_2[x]$ la relación

$$p(x)\ R\ q(x) \iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{W}$$

- Demuestre que R es una relación de equivalencia

  Solución

  Observamos en primer lugar que

$$\begin{aligned}
p(x)\ R\ q(x) &\iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{W} \\
&\iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (p(x) - q(x))(1) = 0 \\
&\iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (p(1) - q(1)) = 0 \\
&\iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge p(1) = q(1)
\end{aligned}$$

$$p(x)\ R\ q(x) \iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge p(1) = q(1) \tag{9}$$

  Conforme a la equivalencia obtenida en (9) tenemos que:

  [a] R es una relación reflexiva pues, si $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces

$$p(1) = p(1) \iff p(x)\ R\ p(x)$$

  [b] R es una relación simétrica pues,

$$\begin{aligned}
p(x)\ R\ q(x) &\iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge p(1) = q(1) \\
&\Longrightarrow -(p(x) - q(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge -(p(1) - q(1)) = 0 \\
&\Longrightarrow (q(x) - p(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge q(1) = p(1) \\
&\Longrightarrow q(x)\ R\ p(x)
\end{aligned}$$

[c] R es una relación transitiva pues, si $p(x)\ R\ q(x)$ y $q(x)\ R\ h(x)$ entonces

$$\begin{aligned}
p(x)\ R\ q(x) \wedge q(x)\ R\ h(x) &\iff [(p(x)-q(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge p(1)=q(1)] \wedge [(q(x)-h(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge q(1)=h(1)] \\
&\implies (p(x)-q(x))+(q(x)-h(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (p(1)-q(1))+(q(1)-h(1))=0 \\
&\implies (p(x)-h(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (p(1)-h(1))=0 \\
&\implies (p(x)-h(x)) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge p(1)=h(1) \\
&\implies p(x)\ R\ h(x)
\end{aligned}$$

Así que R es una relación de equivalencia

- Demuestre que $\mathbb{W} = \overline{0+0x+0x^2}$

  Solución

$$\begin{aligned}
p(x) \in \overline{0+0x+0x^2} &\Leftrightarrow p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\ \wedge\ p(x)\ R\ (0+0x+0x^2) \\
&\Leftrightarrow p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\ \wedge\ p(1)=(0+0x+0x^2)(1)=0 \\
&\Leftrightarrow p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\ \wedge\ p(1)=0 \\
&\Leftrightarrow p(x) \in \mathbb{W}
\end{aligned}$$

Demostración alternativa

[a] Observemos también que

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]\ \wedge\ p(1)=0 \\
&\iff p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]\ \wedge\ a_0+a_1+a_2=0
\end{aligned}$$

[b] Si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces $(p(x)-p(x))=0+0x+0x^2 \in \mathbb{W}$, pues $0+0+0=0$, es decir $p(x)\ R\ p(x)$ y R es una relación reflexiva

[c] Si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces

$$\begin{aligned}
p(x)\ R\ q(x) &\iff (p(x)-q(x)) \in \mathbb{W} \\
&\iff (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2 \in \mathbb{W} \\
&\iff (a_0-b_0)+(a_1-b_1)+(a_2-b_2)=0 \\
&\implies -[(a_0-b_0)+(a_1-b_1)+(a_2-b_2)]=0 \\
&\implies -(a_0-b_0)-(a_1-b_1)-(a_2-b_2)=0 \\
&\implies (b_0-a_0)+(b_1-a_1)+(b_2-a_2)=0 \\
&\implies (q(x)-p(x)) \in \mathbb{W} \\
&\implies q(x)\ R\ p(x)
\end{aligned}$$

Así que R es una relación simétrica

[d] Supongamos que, $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$p(x)\ R\ q(x) \wedge q(x)\ R\ h(x)$$

entonces

$$\begin{aligned}
p(x)\ R\ q(x) &\iff (p(x)-q(x)) \in \mathbb{W} \\
&\iff (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2 \in \mathbb{W} \\
&\iff (a_0-b_0)+(a_1-b_1)+(a_2-b_2)=0 \qquad (10)
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} q(x)\ R\ h(x) &\iff (q(x) - h(x)) \in \mathbb{W} \\ &\iff (b_0 - c_0) + (b_1 - c_1)x + (b_2 - c_2)x^2 \in \mathbb{W} \\ &\iff (b_0 - c_0) + (b_1 - c_1) + (b_2 - c_2) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Ahora de (10) y (11) sigue que

$$\begin{aligned} (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (b_0 - c_0) + (b_1 - c_1) + (b_2 - c_2) &= 0 \Longrightarrow \\ (a_0 - c_0) + (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) &= 0 \Longrightarrow (p(x) - h(x)) \in \mathbb{W} \end{aligned}$$

Luego, R es una relación transitiva

Solución

$$\begin{aligned} p(x) \in \overline{0 + 0x + 0x^2} &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \ \wedge\ p(x)\ R\ (0 + 0x + 0x^2) \\ &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \ \wedge\ (a_0 - 0) + (a_1 - 0)x + (a_2 - 0)x^2 \in \mathbb{W} \\ &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \ \wedge\ (a_0 + a_1x + a_2x^2) \in \mathbb{W} \\ &\Leftrightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in (\mathbb{R}_2[x] \cap \mathbb{W}) = \mathbb{W} \end{aligned}$$