Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Prueba Acumulativa Semestral
Profesor Ricardo Santander Baeza
24 de Agosto del 2009

[1] Si $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ es una función tal que $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$ entonces

[a] Usando inducción matemática muestre que

$$f^n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+n & b \\ c & d+n \end{pmatrix} \; (\forall n; n \in \mathbb{N}) \qquad (\text{donde, } f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \;(n \text{ veces })) \tag{1}$$

En efecto

- Para $n = 1$ tenemos que

$$f^1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$$

Así que,

$$f^1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

y por tanto la fórmula es verdadera para $n = 1$

- Supongamos como hipótesis de inducción que

$$f^n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+n & b \\ c & d+n \end{pmatrix} \tag{3}$$

- Ahora mostremos que la fórmula es verdadera para $n + 1$, es decir verifiquemos que

$$f^{n+1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+(n+1) & b \\ c & d+(n+1) \end{pmatrix} \tag{4}$$

En efecto

$$\begin{aligned} f^{n+1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= (f^n \circ f^1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= f^n\left(f^1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{(2)}{=} f^n\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} \\ &\overset{(3)}{=} f^n\begin{pmatrix} (a+1)+n & b \\ c & (d+1)+n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+(n+1) & b \\ c & d+(n+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que (4) es verdadera, y por ende (1) es verdadera

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

[b] Demuestre que f^n es una función biyectiva $(\forall n; n \in \mathbb{N})$.

Conforme a nuestras definiciones y teoremas estudiados en clases tenemos al menos dos alternativas, para probar la afirmación propuesta:

Alternativa 1. Usaremos el teorema o "herramienta maestra" que dice f^n será biyectiva si existe para cada $n \in \mathbb{N}$ su inversa, digamos $(f^n)^{-1}$. En esta dirección define

$$f^{-n} : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \text{ tal que } f^{-n}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-n & b \\ c & d-n \end{pmatrix}$$

Ahora, verificamos directamente que

$$\begin{aligned} (f^n \circ f^{-n})\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= f^n\left(f^{-n}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\ &= f^n\begin{pmatrix} a-n & b \\ c & d-n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-n+n & b \\ c & d-n+n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f^{-n} \circ f^n)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= f^{-n}\left(f^n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\ &= f^{-n}\begin{pmatrix} a+n & b \\ c & d+n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+n-n & b \\ c & d+n-n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$\left.\begin{aligned} (f^{-n} \circ f^n) &= 1_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\ (f^n \circ f^{-n}) &= 1_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f^{-n} = (f^n)^{-1}$$

Alternativa 2. Demostramos directamente que f^n es inyectiva y sobreyectiva, usando sus propias definiciones.

En efecto

Para la inyectividad hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f^n\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f^n\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} &\Longrightarrow \begin{pmatrix} a+n & b \\ c & d+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'+n & b \\ c & d'+n \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow (a+n = a'+n) \wedge b = b' \wedge c = c' \wedge (d+n = d'+n) \\ &\Longrightarrow a = a' \wedge b = b' \wedge c = c' \wedge d = d' \\ &\Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto f^n es inyectiva para cada $n \in \mathbb{N}$

Para la sobreyectividad, dado que $Img(f^n) \subset \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces sólo resta mostrar que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \subset Img(f^n)$.

Luego, debemos resolver la ecuación $f^n(X) = A$ en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ para $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ dada. Es decir debemos resolver la ecuación

$$f^n \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
f^n\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} &\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1+n & x_2\\ x_3 & x_4+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\\
&\Longrightarrow (x_1+n=a)\wedge x_2=b\wedge x_3=c\wedge(x_4+n=d)\\
&\Longrightarrow (x_1=a-n)\wedge x_2=b\wedge x_3=c\wedge(x_4=d-n)
\end{aligned}
$$

Verificamos como corresponde, (no olvide lo que le ha pasado a los Ingenieros que no han verificado la factibilidad de sus proyectos).

$$
f^n\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}=f^n\begin{pmatrix} a-n & b\\ c & d-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-n+n & b\\ c & d-n+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}
$$

Luego,

$$
f^n\begin{pmatrix} a-n & b\\ c & d-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\subset Img(f^n)=\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\subset Img(f^n)
$$

Y f^n es sobreyectiva, y por ende biyectiva.

[2] Si $A=\{a_1,a_2,\dots\}\subset\mathbb{R}$ es una progresión aritmética y $S_j=\displaystyle\sum_{i=1}^{n_j}a_i$, para $j=1,2,3$ entonces demuestre que

$$
\frac{(n_2-n_3)}{n_1}\,S_1+\frac{(n_3-n_1)}{n_2}\,S_2+\frac{(n_1-n_2)}{n_3}\,S_3=0 \qquad (5)
$$

Solución

[a] Como $A=\{a_1,a_2,\dots\}\subset\mathbb{R}$ es una progresión aritmética entonces

$$
S_j = \frac{n_j}{2}(a_1+a_{n_j})\quad (j=1,2,3)
$$

[b] Así que, si hacemos $S=\dfrac{(n_2-n_3)}{n_1}\,S_1+\dfrac{(n_3-n_1)}{n_2}\,S_2+\dfrac{(n_1-n_2)}{n_3}\,S_3$ entonces

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{(n_2-n_3)}{2}\,(a_1+a_{n_1})+\frac{(n_3-n_1)}{2}\,(a_1+a_{n_2})+\frac{(n_1-n_2)}{2}\,(a_1+a_{n_3})\\
&= \frac{n_2a_1}{2}-\frac{n_3a_1}{2}+\frac{n_2a_{n_1}}{2}-\frac{n_3a_{n_1}}{2}+\frac{n_3a_1}{2}-\frac{n_1a_1}{2}+\frac{n_3a_{n_2}}{2}-\frac{n_1a_{n_2}}{2}+\frac{n_1a_1}{2}-\frac{n_2a_1}{2}+\frac{n_1a_{n_3}}{2}-\frac{n_2a_{n_3}}{2}\\
&= \frac{n_2a_{n_1}}{2}-\frac{n_3a_{n_1}}{2}+\frac{n_3a_{n_2}}{2}-\frac{n_1a_{n_2}}{2}+\frac{n_1a_{n_3}}{2}-\frac{n_2a_{n_3}}{2}\\
&= \frac{n_2(a_1+(n_1-1)d)}{2}-\frac{n_3(a_1+(n_1-1)d)}{2}+\frac{n_3(a_1+(n_2-1)d)}{2}-\frac{n_1(a_1+(n_2-1)d)}{2}+\\
&\quad \frac{n_1(a_1+(n_3-1)d)}{2}-\frac{n_2(a_1+(n_3-1)d)}{2}\\
&= \frac{1}{2}(n_2a_1+n_2n_1d-n_2d-n_3a_1-n_3n_1d+n_3d+n_3a_1+n_3n_2d-n_3d-n_1a_1-n_1n_2d+n_1d+\\
&\quad n_1a_1+n_1n_3d-n_1d-n_2a_1-n_2n_3d+n_2d)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

[3] Si consideramos la función $h:\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\longmapsto\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ definida por $h\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b & a-b\\ c-b & d-a\end{pmatrix}$ entonces

[a] Muestre que h es un homomorfismo de grupos

Solución

$$\begin{aligned}
h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= h\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a+a')-(b+b') & (a+a')-(b+b') \\ (c+c')-(b+b') & (d+d')-(a+a') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a-b)+(a'-b') & (a-b)+(a'-b') \\ (c-b)+(c'-b') & (d-a)+(d'-a') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a-b) & (a-b) \\ (c-b) & (d-a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a'-b') & (a'-b') \\ (c'-b') & (d'-a') \end{pmatrix} \\
&= h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, h es un homomorfismo de grupos

[b] Además demuestre que la relación

$$A \,\Re\, B \quad \Longleftrightarrow \quad (A-B) \in \ker(h)$$

es una relación transitiva en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Solución

Debemos recordar que como h es un homomorfismo de grupos entonces $\ker(h) = \{C \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid h(C) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$, así que

$$A \,\Re\, B \Longleftrightarrow (A-B) \in \ker(h) \Longleftrightarrow h(A-B) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}$$

Con esto en mente procedemos a mostrar que $\Re$ es una relación transitiva:

Si $A \,\Re\, B \quad \wedge \quad B \,\Re\, C$ entonces conforme a lo anterior

$$\left.\begin{array}{l} A \,\Re\, B \Longleftrightarrow h(A-B) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\ B \,\Re\, C \Longleftrightarrow h(B-C) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \end{array}\right\} \Longrightarrow h(A-C) = h(A-B+B-C) = h(A-B) + h(B-C) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}$$

Luego, $A \,\Re\, C$ y entonces $\Re$ es una relación transitiva.

[4] Si $A = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 8 & 16 \\ 2 & x+4 & 8 & 16 \\ 2 & 4 & x+8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & x+16 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \quad = \quad \{x \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Solución

$$\begin{aligned}
x \in \mathbb{S} &\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \;\wedge\; A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \\
&\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \;\wedge\; \det(A) = 0
\end{aligned}$$

entonces procedemos ahora, a calcular $\det(A)$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 8 & 16 \\ 2 & x+4 & 8 & 16 \\ 2 & 4 & x+8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & x+16 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 2 & 4 & 8 & x+16 \end{pmatrix}$$

Si $x = 0$ entonces $\det(A) = 0$ y $0 \in \mathbb{S}$

Si $x \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 2 & 4 & 8 & x+16 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & 4 & 8 & x+18 \end{pmatrix} \\ &= x\det\begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & -x \\ 4 & 8 & x+18 \end{pmatrix} = x\det\begin{pmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & -x \\ 0 & 8 & x+22 \end{pmatrix} \\ &= x^2\det\begin{pmatrix} x & -x \\ 8 & x+22 \end{pmatrix} = x^2(x^2+30x) = x^3(x+30) \end{aligned}$$

Así que

$$\mathbb{S} = \{0, -30\}$$