Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Solución Examen 2 de Álgebra[1]
Profesor Ricardo Santander Baeza
22 de Marzo del 2009

[1] Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 2a-1 \\ x & + & ay & + & z & = & a^2 \\ x & + & y & + & az & = & 3-2a \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos:

$S_1 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene solución única}\}$
$S_2 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$
$S_3 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ no tiene solución}\}$

Solución

Aplicamos el teorema del rango en el sistema (*).

Etapa 1. Escalonamos la matriz ampliada asociada al sistema (*)

$$\begin{aligned}
(A|B) &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & | & 2a-1 \\ 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 1 & 1 & a & | & 3-2a \end{pmatrix} (l_1 \leftrightarrow l_2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ a & 1 & 1 & | & 2a-1 \\ 1 & 1 & a & | & 3-2a \end{pmatrix} \begin{array}{c} (l_2 \to l_2 - al_1) \\ (l_3 \to l_3 - l_1) \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \\ 0 & 1-a & a-1 & | & 3-2a-a^2 \end{pmatrix} (l_2 \leftrightarrow l_3) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & | & 3-2a-a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \end{pmatrix} \qquad (**)
\end{aligned}$$

Caso 1. Si $a = 1$ entonces sustituyendo en (**), tenemos que

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

Así que $\rho(A|B) = \rho(A) = 1 < 3$. Por tanto (*) tiene infinitas soluciones.

Caso 2. Si $a \neq 1$ entonces podemos seguir operando en (**), y tenemos

$$\begin{aligned}
(A|B) &= \left(\begin{array}{ccccc} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & | & 3-2a-a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \end{array}\right) \quad (l_2 \leftrightarrow \frac{1}{1-a}\, l_2) \\
&= \left(\begin{array}{ccccc} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & | & a+3 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} (l_1 \to l_1 - al_2) \\ (l_3 \to l_3 - (1-a^2)l_2) \end{array} \\
&= \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1+a & | & -3a \\ 0 & 1 & -1 & | & a+3 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & | & 3a^2+a-4 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Caso 2.1 Si $a \neq 1$ y $a = -2$ entonces $\rho(A) = 2$ y $\rho(A|B) = 3$, pues $3(-2)^2 - 2 - 4 = 6$. Así que (*) no tiene solución

Caso 2.2 Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ entonces $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$, y (*) tiene solución única.

Conclusión

$S_1 = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$
$S_2 = \{1\}$
$S_3 = \{-2\}$

[2] Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriale y $T \in Ł_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Si consideramos $\mathbb{U} \leq \mathbb{V}$ y definimos el conjunto:

$$T(\mathbb{U}) = \{w \in \mathbb{W} \mid (\exists u; u \in \mathbb{U}) \wedge T(u) = w\}$$

entonces demuestre que $T(\mathbb{U}) \leq \mathbb{W}$.

Solución

[a] En primer lugar

[i] $w \in T(\mathbb{U}) \Longleftrightarrow w \in W \;\wedge\; (\exists u; u \in \mathbb{U}) \wedge T(u) = w$. Así que $T(\mathbb{U}) \subset \mathbb{W}$

[ii] $\mathbb{U} \leq \mathbb{V} \Longrightarrow 0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{U} \Longrightarrow T(0_V) \in \mathbb{W}$

[iii] $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \Longrightarrow T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$. Así que $0_{\mathbb{W}} \in T(\mathbb{U})$ y $T(\mathbb{U}) \neq \emptyset$

[b] Sean $w_1 \in T(\mathbb{U}) \wedge w_2 \in T(\mathbb{U})$ entonces

$$\begin{aligned}
w_1 \in T(\mathbb{U}) &\Longleftrightarrow (\exists u_1; u_1 \in \mathbb{U}) : T(u_1) = w_1 \\
w_2 \in T(\mathbb{U}) &\Longleftrightarrow (\exists u_2; u_2 \in \mathbb{U}) : T(u_2) = w_2
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{array}{rcll} w_1 + w_2 & = & T(u_1) + T(u_2) & (\text{ Por construcción}) \\ & = & T(u_1 + u_2) & (\text{ } T \text{ es lineal}) \\ & = & T(u) & (u_1 + u_2 = u \in \mathbb{U}, \text{ pues } \mathbb{U} \leq \mathbb{V}) \end{array}$$

Luego $(w_1 + w_2) \in \mathbb{T}(\mathbb{U})$

[c] Sean $\lambda \in \mathbb{K} \wedge w \in T(\mathbb{U})$ entonces

$$w \in T(\mathbb{U}) \iff (\exists u; u \in \mathbb{U}) : T(u) = w$$

Ahora,

$$\begin{array}{rcll} \lambda w & = & \lambda T(u) & (\text{ Por construcción}) \\ & = & T(\lambda u) & (\text{ } T \text{ es lineal}) \\ & = & T(u_1) & (\lambda u = u_1 \in \mathbb{U}, \text{ pues } \mathbb{U} \leq \mathbb{V}) \end{array}$$

Luego $(\lambda w) \in \mathbb{T}(\mathbb{U})$ y conforme a lo probado encima tenemos que $T(\mathbb{U}) \leq \mathbb{W}$.

[3] Si definimos la función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, x - y, y + z, y + z)$ entonces

[a] Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.
Solución

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{array}{rcl} T\left((x, y, z) + (a, b, c)\right) & = & T\left(x + a, y + b, z + c\right) \\ & = & ([x + a] - [y + b], [x + a] - [y + b], [y + b] + [z + c], [y + b] + [z + c]) \\ & = & ([x - y] + [a - b], [x - y] + [a - b], [y + z] + [b + c], [y + z] + [b + c]) \\ & = & (x - y, x - y, y + z, y + z) + (a - b, a - b, b + c, b + c) \\ & = & T\left(x, y, z\right) + T\left(a, b, c\right) \end{array}$$

Además si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{array}{rcl} T\left(\lambda(x, y, z)\right) & = & T\left(\lambda x, \lambda y, \lambda z\right) \\ & = & (\lambda x - \lambda y, \lambda x - \lambda y, \lambda y + \lambda z, \lambda y + \lambda z) \\ & = & (\lambda[x - y], \lambda[x - y], \lambda[y + z], \lambda[y + z]) \\ & = & \lambda\left(x - y, x - y, y + z, y + z\right) \\ & = & \lambda T\left(x, y, z\right) \end{array}$$

Luego, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.

[b] Determine $(\ker(T))^{\perp}$, respecto del producto interno usual de $\mathbb{R}^3$.
Solución

Sabemos que:

$$\begin{array}{rcl} (x,y,z)\in \ker(T) & \Longleftrightarrow & (x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \wedge T(x,y,z)=(0,0,0,0) \\ & \Longleftrightarrow & (x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \wedge (x-y,x-y,y+z,y+z)=(0,0,0,0) \\ & \Longleftrightarrow & (x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \wedge x-y=0 \wedge y+z=0 \\ & \Longleftrightarrow & (x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \wedge x=y \wedge z=-y \end{array}$$

Así,

$$\ker T = \{(y,y,-y) : y\in \mathbb{R}\} = \langle\{(1,1,-1)\}\rangle$$

Y de esta forma,

$$\begin{array}{rcl} (\ker T)^{\perp} & = & \left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,1,-1)\rangle = 0\right\} \\ & = & \left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\right\} \\ & = & \left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 : z=x+y\right\} \\ & = & \{(x,y,x+y) : x,y\in \mathbb{R}\} \\ & = & \langle\{(1,0,1),(0,1,1)\}\rangle \end{array}$$

[4] Construya $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}_4[x]\right)$ tal que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

- $1+x^2\in \ker T$
- $\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}_4[x]\right)_3 = 2$. Es decir la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda = 3$ es 2
- $\dim_{\mathbb{R}}(Img(T)) = 3$

Solución

[a] Consideremos la base canónica $pol(4)=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ de $\mathbb{R}_4[x]$

[b] Para que se verifique que $1+x^2\in \ker T$ y simultáneamente $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T))=3$, basta considerar

$$\ker T = \left\langle \{1,x^2\}\right\rangle$$

Pues de esta forma $\dim_{\mathbb{R}}\ker(T)=2$ y por teorema de la dimensión $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T))=3$,

Además,

$$1+x^2 = 1\cdot 1 + 1\cdot x^2 \Longrightarrow 1+x^2\in \left\langle\{1,x^2\}\right\rangle = \ker(T)$$

[c] Para que $\lambda=3$ sea un valor propio de T con multiplicidad geométrica 2, basta definir,

$$\begin{array}{rcl} T(x) & = & 3x \\ T(x^3) & = & 3x^3 \end{array}$$

[d] Finalmente se puede definir $T(x^4)=x^4$

De esta forma obtenemos

$$\begin{array}{rcl} T\left(p(x)\right) & = & T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4) \\ & = & a_0T(1)+a_1T(x)+a_2T(x^2)+a_3T(x^3)+a_4T(x^4) \\ & = & a_0\cdot 0 + a_1\cdot 3x + a_2\cdot 0 + a_3\cdot 3x^3 + a_4\cdot x^4 \end{array}$$

Por lo tanto, una solución esta dada por:

$$T\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4\right) = 3a_1x+3a_3x^3+a_4x^4$$