Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 4
Profesor Ricardo Santander Baeza
5 de Enero del 2009

[1] Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$ entonces

[a] Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

Solución

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \ \wedge \ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \ \wedge \ a_0 + a_2 = a_1 \\
&\iff p(x) = a_0 + (a_0 + a_2)x + a_2x^2 \wedge [a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R}] \\
&\iff p(x) = a_0 + a_0x + a_2x + a_2x^2 \wedge [a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R}] \\
&\iff p(x) = a_0(1 + x) + a_2(x + x^2) \wedge [a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R}] \\
&\iff p(x) \in \langle \{(1 + x), (x + x^2)\} \rangle
\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{W} = \langle \{(1 + x), (x + x^2)\} \rangle \leq \mathbb{R}_2[x]$

[b] Si definimos para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2) \tag{1}$$

entonces determine $\mathbb{W}^\perp$ respecto del producto definido en (1)

Solución

$$\begin{aligned}
r(x) \in \mathbb{W}^\perp &\iff r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \ \wedge \ \langle r(x), p(x) \rangle = 0 \quad (\forall p(x); p(x) \in \mathbb{W}) \\
&\iff r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \ \wedge \ \langle r_0 + r_1x + r_2x^2, 1 + x \rangle = 0 \wedge \langle r_0 + r_1x + r_2x^2, x + x^2 \rangle = 0
\end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned}
\langle r_0 + r_1x + r_2x^2, 1 + x \rangle = 0 &\iff r_0 \cdot 1 + (r_0 + r_1 + r_2) \cdot 2 + (r_0 + 2r_1 + 4r_2) \cdot 3 = 0 \iff 3r_0 + 4r_1 + 7r_2 = 0 \\
\langle r_0 + r_1x + r_2x^2, x + x^2 \rangle = 0 &\iff r_0 \cdot 0 + (r_0 + r_1 + r_2) \cdot 2 + (r_0 + 2r_1 + 4r_2) \cdot 6 = 0 \iff 4r_0 + 7r_1 + 13r_2 = 0
\end{aligned}$$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

Así que,

$$
\begin{aligned}
r(x)\in \mathbb{W}^{\perp} &\iff r(x)=r_0+r_1x+r_2x^2\in\mathbb{R}_2[x] \ \wedge\ \left.\begin{array}{rcl} 3r_0+4r_1+7r_2 &=& 0\\ 4r_0+7r_1+13r_2 &=& 0\end{array}\right|\\
&\iff r(x)=r_0+r_1x+r_2x^2\in\mathbb{R}_2[x] \ \wedge\ \left.\begin{array}{rcl} 12r_0+16r_1+28r_2 &=& 0\\ 12r_0+21r_1+39r_2 &=& 0\end{array}\right|\\
&\iff r(x)=r_0+r_1x+r_2x^2\in\mathbb{R}_2[x] \ \wedge 5r_1+11r_2=0\\
&\iff r(x)=r_0+r_1x+r_2x^2\in\mathbb{R}_2[x] \ \wedge r_1=-\frac{11}{5}r_2 \ \wedge\ r_0=-\frac{7}{4}r_1-\frac{13}{4}r_2=\frac{3}{5}r_2\\
&\iff r(x)=\frac{3}{5}r_2-\frac{11}{5}r_2x+r_2x^2 \ \wedge r_2\in\mathbb{R}\\
&\iff r(x)=r_2\left(\frac{3}{5}-\frac{11}{5}x+x^2\right) \ \wedge r_2\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Luego, $\mathbb{W}^{\perp}=\left\langle \frac{3}{5}-\frac{11}{5}x+x^2\right\rangle$

Podemos comprobar directamente que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{3}{5}-\frac{11}{5}x+x^2, 1+x\right\rangle &= \frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}-\frac{11}{5}+1\right)2+\left(\frac{3}{5}-\frac{22}{5}+4\right)3=0\\
\left\langle \frac{3}{5}-\frac{11}{5}x+x^2, x+x^2\right\rangle &= \frac{3}{5}\cdot 0+\left(\frac{3}{5}-\frac{11}{5}+1\right)2+\left(\frac{3}{5}-\frac{22}{5}+4\right)6=0
\end{aligned}
$$

[2] Sea $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})=4$, y $\alpha=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ una base de $\mathbb{V}$.

[a] Demuestre que $\beta=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ tal que $w_i=\sum_{j=1}^{i}(-1)^j v_j$, para $i=1,2,3,4$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{V}$.

Solución

En primer lugar, tenemos que por definición.

$$
\begin{array}{rcl}
w_1 &=& -v_1\\
w_2 &=& -v_1+v_2\\
w_3 &=& -v_1+v_2-v_3\\
w_4 &=& -v_1+v_2-v_3+v_4
\end{array} \tag{2}
$$

Ahora, para continuar para demostrar la independencia lineal de β procedemos conforme a la definición, y a lo obtenido en (2)

$$
\begin{aligned}
a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3+a_4w_4=0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow a_1(-v_1)+a_2(-v_1+v_2)+a_3(-v_1+v_2-v_3)+a_4(-v_1+v_2-v_3+v_4)=0_{\mathbb{V}}\\
&\Longrightarrow (-a_1-a_2-a_3-a_4)v_1+(a_2+a_3+a_4)v_2+(-a_3-a_4)v_3+a_4v_4=0_{\mathbb{V}}\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} -a_1-a_2-a_3-a_4 &=& 0\\ a_2+a_3+a_4 &=& 0\\ -a_3-a_4 &=& 0\\ a_4 &=& 0\end{array}\right| \Longrightarrow a_4=a_3=a_2=a_1=0
\end{aligned}
$$

Así que β es linealmente independiente

[b] Determine $[w_1+w_2+w_3+w_4]_{\alpha}$

Solución

Conforme a (2) tenemos que

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= (-v_1) + (-v_1 + v_2) + (-v_1 + v_2 - v_3) + (-v_1 + v_2 - v_3 + v_4) \\ &= -4v_1 + 3v_2 - 2v_3 + v_4 \end{aligned}$$

Luego,

$$[w_1 + w_2 + w_3 + w_4]_\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[3] Si $\mathbb{W} = \langle\{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\}\rangle \leq \mathbb{R}^4$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

[a] Determine $P_{\mathbb{W}}$

Solución

Observamos que $\langle (1,1,1,0),(0,1,1,1)\rangle = 2$ y que $\alpha = \{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\}$ es linealmente independiente, por tanto debemos ortogonalizar usando Gram - Schmidt, e.e.

$$\begin{aligned} v_1' &= (1,1,1,0) \\ v_2' &= (0,1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1,0),(0,1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1,0),(1,1,1,0)\rangle}(1,1,1,0) \\ &= (0,1,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1,0) \\ &= \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\alpha' = \left\{(1,1,1,0),\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)\right\}$$

Es una base ortogonal y entonces

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{W}}(x,y,z,t) &= \frac{\langle (x,y,z,t),(1,1,1,0)\rangle}{\langle (1,1,1,0),(1,1,1,0)\rangle}(1,1,1,0) + \frac{\langle (x,y,z,t),\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)\rangle}{\langle \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right),\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)\rangle}\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right) \\ &= \frac{x+y+z}{3}(1,1,1,0) + \frac{-2x+y+z+3t}{5}\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right) \\ &= \left(\frac{3x+y+z-2t}{5},\frac{x+2y+2z+t}{5},\frac{x+2y+2z+t}{5},\frac{-2x+y+z+3t}{5}\right) \end{aligned}$$

[b] Calcule $d((-2,1,1,3),W)$

Solución

Alternativa 1. Como $(-2,1,1,3) = -2(1,1,1,0) + 3(0,1,1,1) \in \mathbb{W}$ entonces $d((-2,1,1,3),W) = 0$.

Alternativa 2. Hacemos el cálculo usando la definición

$$d((-2,1,1,3),W) \;=\; \|(-2,1,1,3)-P_{\mathbb{W}}(-2,1,1,3)\| = \|(-2,1,1,3)-(-2,1,1,3)\| = 0$$

[4] Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}^4$ tal que $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x-y, \lambda x + y, x + \lambda y + z, x + y + z + t)$

[a] Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2), \mathbb{R}^4)$ $(\forall \lambda, \lambda \in \mathbb{R})$

Solución

Etapa 1. Si $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix}$ entonces debemos demostrar que $T(A+B) = T(A) + T(B)$.

$$\begin{aligned}
T(A+B) &= T\begin{pmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ z_1+z_2 & t_1+t_2 \end{pmatrix} \\
&= ((x_1+x_2)-(y_1+y_2), \lambda(x_1+x_2)+(y_1+y_2), (x_1+x_2)+\lambda(y_1+y_2)+(z_1+z_2), \\
&\quad\; x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2+t_1+t_2) \\
&= (x_1+x_2-y_1-y_2, \lambda x_1+\lambda x_2+y_1+y_2, x_1+x_2+\lambda y_1+\lambda y_2)+z_1+z_2, \\
&\quad\; x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2+t_1+t_2) \\
&= (x_1-y_1, \lambda x_1+y_1, x_1+\lambda y_1+z_1, x_1+y_1+z_1+t_1) + \\
&\quad\; (x_2-y_2, \lambda x_2+y_2, x_2+\lambda y_2+z_2, x_2+y_2+z_2+t_2) \\
&= T\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & t_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & t_2 \end{pmatrix} \\
&= T(A) + T(B)
\end{aligned}$$

Etapa 2. Si $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y $r \in \mathbb{R}$ entonces debemos demostrar que $T(rA) = rT(A)$.

$$\begin{aligned}
T(rA) &= T\left(r\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{pmatrix} rx & ry \\ rz & rt \end{pmatrix}\right) \\
&= (rx-ry, \lambda rx+ry, rx+\lambda ry+rz, rx+ry+rz+rt) \\
&= (r(x-y), r(\lambda x+y), r(x+\lambda y+z), r(x+y+z+t)) \\
&= r(x-y, \lambda x+y, x+\lambda y+z, x+y+z+t) \\
&= rT\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\
&= rT(A)
\end{aligned}$$

Luego, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2), \mathbb{R}^4)$ $(\forall \lambda, \lambda \in \mathbb{R})$

[b] Determine el conjunto $\mathbb{B} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ es un isomorfismo}\}$

Solución

En primer lugar, $\lambda \in \mathbb{B} \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ T$ es un isomorfismo $\qquad (*)$

En segundo lugar, observamos que como T es lineal y que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)) = 4$ entonces conforme al teorema de la dimensión, para que T sea un isomorfismo es suficiente verificar que T es inyectiva o bien sobreyectiva.
En este caso, estudiaremos las condiciones para la inyectividad de T, es decir:

$$\lambda \in \mathbb{B} \iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ T \text{ es inyectiva} \Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \ker(T) = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
A \in \ker(T) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge T(A) = 0_{\mathbb{R}} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (0,0,0,0) \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (x-y, \lambda x + y, x + \lambda y + z, x + y + z + t) = (0,0,0,0) \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \left.\begin{array}{lcl} x - y & = & 0 \\ \lambda x + y & = & 0 \\ x + \lambda y + z & = & 0 \\ x + y + z + t & = & 0 \end{array}\right| \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \left.\begin{array}{lcl} x & = & y \\ x(\lambda + 1) & = & 0 \\ x(1+\lambda) + z & = & 0 \\ x + x + z + t & = & 0 \end{array}\right| \qquad (**)
\end{aligned}$$

Ojo en $(**)$ para que $x = 0$ es necesario y suficiente que $\lambda + 1 \neq 0$, es decir $\lambda \neq -1$. Por tanto T será inyectiva y por ende un isomorfismo si $\lambda \neq -1$, luego,

$$\mathbb{B} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$