

Álgebra¹ - Solución Pep 2
Profesor Ricardo Santander Baeza
25 de Agosto del 2008

1. Si $\mathbb{U} = \{h_0 + h_1x + h_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid h_0 + h_2 = h_1\}$ entonces definimos en $\mathbb{R}_2[x]$ la relación:

$$p(x) \mathfrak{R} q(x) \iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{U}$$

- [a] Demuestre que $\mathfrak{R}$ es una relación de equivalencia

Solución

Etapa 1. Para que $\mathfrak{R}$ sea una relación de equivalencia debemos mostrar que es una relación Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

Etapa 2. Gestión de la información:

- [i] En primer lugar que $p(x) \mathfrak{R} q(x)$, significa lo siguiente:

Para $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned} p(x) \mathfrak{R} q(x) &\iff (p(x) - q(x)) \in \mathbb{U} \\ &\iff ((p_0 + p_1x + p_2x^2) - (q_0 + q_1x + q_2x^2)) \in \mathbb{U} \\ &\iff (p_0 - q_0 + (p_1 - q_1)x + (p_2 - q_2)x^2) \in \mathbb{U} \\ &\iff (p_0 - q_0) + (p_2 - q_2) = (p_1 - q_1) \quad (*) \end{aligned}$$

- [ii] $\mathfrak{R}$ será una relación reflexiva si $p(x) \mathfrak{R} p(x) \quad (\forall p(x); p(x) \in \mathbb{R}_2[x])$.

En efecto, como $0 + 0 = 0$. De (*) sigue que

$$(p_0 - p_0) + (p_2 - p_2) = (p_1 - p_1) \iff p(x) \mathfrak{R} p(x) \quad (\forall p(x); p(x) \in \mathbb{R}_2[x])$$

Así que $\mathfrak{R}$ es una relación reflexiva.

- [iii] $\mathfrak{R}$ será una relación simétrica si $p(x) \mathfrak{R} q(x) \implies q(x) \mathfrak{R} p(x)$.

En efecto de (*), sigue que

$$\begin{aligned} p(x) \mathfrak{R} q(x) &\iff (p_0 - q_0) + (p_2 - q_2) = (p_1 - q_1) \\ &\implies -((p_0 - q_0) + (p_2 - q_2)) = -(p_1 - q_1) \\ &\implies -(p_0 - q_0) + (-)(p_2 - q_2) = -(p_1 - q_1) \\ &\implies (q_0 - p_0) + (q_2 - p_2) = (q_1 - p_1) \\ &\implies q(x) \mathfrak{R} p(x) \end{aligned}$$

Luego, $\mathfrak{R}$ es una relación simétrica.

¹Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

[iv] $\Re$ será una relación transitiva si

$$p(x)\Re q(x) \wedge q(x)\Re r(x) \implies p(x)\Re r(x)$$

En efecto, si $r(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces de (*), sigue que

$$\begin{aligned} p(x) \Re q(x) &\iff (p_0 - q_0) + (p_2 - q_2) = (p_1 - q_1) \\ q(x) \Re r(x) &\iff (q_0 - r_0) + (q_2 - r_2) = (q_1 - r_1) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} p(x) \Re q(x) \wedge q(x) \Re r(x) &\iff \left[\begin{array}{l} (p_0 - q_0) + (p_2 - q_2) = (p_1 - q_1) \\ (q_0 - r_0) + (q_2 - r_2) = (q_1 - r_1) \end{array} \right] \\ &\implies (p_0 - q_0) + (q_0 - r_0) + (p_2 - q_2) + (q_2 - r_2) = (p_1 - q_1) + (q_1 - r_1) \\ &\implies (p_0 - r_0) + (p_2 - r_2) = (p_1 - r_1) \\ &\implies p(x)\Re r(x) \end{aligned}$$

Luego, $\Re$ es una relación transitiva, y por ende una relación de equivalencia

[b] Determine $\overline{a_0 + a_1x + a_2x^2} = \{b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid (b_0 + b_1x + b_2x^2)\Re(a_0 + a_1x + a_2x^2)\}$

Solución

De (*) sigue que

$$\begin{aligned} b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \overline{a_0 + a_1x + a_2x^2} &\iff b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (b_0 + b_1x + b_2x^2)\Re(a_0 + a_1x + a_2x^2) \\ &\iff b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (b_0 - a_0) + (b_2 - a_2) = (b_1 - a_1) \\ &\iff b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge b_0 - b_1 + b_2 = a_0 - a_1 + a_2 \\ &\iff b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge b_0 = a_0 + (b_1 - a_1) + (a_2 - b_2) \\ &\iff (a_0 + (b_1 - a_1) + (a_2 - b_2)) + b_1x + b_2x^2 : (b_1 \in \mathbb{R} \wedge b_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Así que,

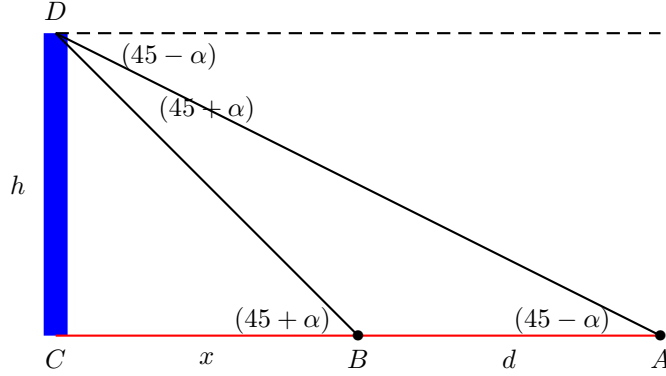
$$\overline{a_0 + a_1x + a_2x^2} = \{(a_0 + (b_1 - a_1) + (a_2 - b_2)) + b_1x + b_2x^2 \mid b_1 \in \mathbb{R} \wedge b_2 \in \mathbb{R}\} \quad (**)$$

2. Desde la cúspide de una torre de altura h metros una persona observa, con ángulos de depresión de $(45 - \alpha)$ y $(45 + \alpha)$, a dos objetos que están en el plano, y en la línea que pasa por el pie de dicha torre. Si llamamos d a la distancia entre los objetos observados entonces demuestre que

$$d = 2h \tan(2\alpha)$$

Solución

Etapa 1. Planteamiento del problema, (opcional), pero muy útil



Etapla 2. Gestión de la información

[a] En triángulo rectángulo BCD tenemos que

$$\tan(45 + \alpha) = \frac{h}{x} \iff x = \frac{h}{\tan(45 + \alpha)} \quad (1)$$

[b] En triángulo rectángulo ACD tenemos que

$$\tan(45 - \alpha) = \frac{h}{x + d} \iff h = x \tan(45 - \alpha) + d \tan(45 - \alpha) \quad (2)$$

[c] Sustituyendo el valor de x de (1) en (2) tenemos que

$$\begin{aligned} h &= \frac{h}{\tan(45 + \alpha)} \tan(45 - \alpha) + d \tan(45 - \alpha) \iff d \tan(45 - \alpha) = h - \frac{h}{\tan(45 + \alpha)} \tan(45 - \alpha) \\ &\iff d \tan(45 - \alpha) = h \left[1 - \frac{\tan(45 - \alpha)}{\tan(45 + \alpha)} \right] \\ &\iff d \tan(45 - \alpha) = h \left[\frac{\tan(45 + \alpha) - \tan(45 - \alpha)}{\tan(45 + \alpha)} \right] \\ &\iff d = h \left[\frac{\tan(45 + \alpha) - \tan(45 - \alpha)}{\tan(45 + \alpha) \tan(45 - \alpha)} \right] \\ &\iff d = h \left[\frac{\left(\frac{\tan 45 + \tan \alpha}{1 - \tan 45 \tan \alpha} \right) - \left(\frac{\tan 45 - \tan \alpha}{1 + \tan 45 \tan \alpha} \right)}{\left(\frac{\tan 45 + \tan \alpha}{1 - \tan 45 \tan \alpha} \right) \left(\frac{\tan 45 - \tan \alpha}{1 + \tan 45 \tan \alpha} \right)} \right] \\ &\iff d = h \left[\frac{\left(\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} \right) - \left(\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right)}{\left(\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} \right) \left(\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right)} \right] \\ &\iff d = h \left[\frac{(1 + \tan(\alpha))^2 + (1 - \tan(\alpha))^2}{1 - \tan^2 \alpha} \right] \\ &\iff d = h \left[\frac{4 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2 \alpha} \right] \\ &\iff d = 2h \left[\frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2 \alpha} \right] \\ &\iff d = 2h \tan(2\alpha) \end{aligned}$$

3. Si definimos la función $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3) \mapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$, tal que $T \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y - z \\ 2\lambda x + \lambda z \\ x - \lambda y + (1 + \lambda)z \end{pmatrix}$ entonces

[a] Demuestre que T es un homomorfismo para cada $\lambda \in \mathbb{R}$

Solución

Etapa 1. Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3)$ debemos mostrar que $T(A + B) = T(A) + T(B)$

Etapa 2. Gestión de la información

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3) &\iff A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \\ B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3) &\iff B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} T(A + B) &= T\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= T\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + \lambda(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) \\ 2\lambda(x_1 + x_2) + \lambda(z_1 + z_2) \\ (x_1 + x_2) - \lambda(y_1 + y_2) + (1 + \lambda)(z_1 + z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \lambda y_1 + \lambda y_2 - z_1 - z_2 \\ 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 + \lambda z_1 + \lambda z_2 \\ x_1 + x_2 - \lambda y_1 - \lambda y_2 + (1 + \lambda)z_1 + (1 + \lambda)z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 - z_1 + x_2 + \lambda y_2 - z_2 \\ 2\lambda x_1 + \lambda z_1 + 2\lambda x_2 + \lambda z_2 \\ x_1 - \lambda y_1 + (1 + \lambda)z_1 + x_2 - \lambda y_2 + (1 + \lambda)z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + \lambda y_1 - z_1) + (x_2 + \lambda y_2 - z_2) \\ (2\lambda x_1 + \lambda z_1) + (2\lambda x_2 + \lambda z_2) \\ (x_1 - \lambda y_1 + (1 + \lambda)z_1) + (x_2 - \lambda y_2 + (1 + \lambda)z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 - z_1 \\ 2\lambda x_1 + \lambda z_1 \\ x_1 - \lambda y_1 + (1 + \lambda)z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + \lambda y_2 - z_2 \\ 2\lambda x_2 + \lambda z_2 \\ x_2 - \lambda y_2 + (1 + \lambda)z_2 \end{pmatrix} \\ &= T\left(\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= T(A) + T(B) \end{aligned}$$

[b] Determine el conjunto $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ No es inyectiva}\}$

Solución

Etapa 1. $\lambda \in \mathbb{S} \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge T \text{ No es inyectiva}$

Etapa 2. Gestión de la información

Si T no debe ser inyectiva entonces debemos estudiar el núcleo o kernel de T .

$$\begin{aligned}
A \in \ker(T) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3) \wedge T(A) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \wedge T \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x + \lambda y - z \\ 2\lambda x + \lambda z \\ x - \lambda y + (1 + \lambda)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \wedge \begin{cases} x + \lambda y - z = 0 \\ 2\lambda x + \lambda z = 0 \\ x - \lambda y + (1 + \lambda)z = 0 \end{cases} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \wedge \begin{cases} x + \lambda y - z = 0 \\ \lambda(2x + z) = 0 \\ x - \lambda y + (1 + \lambda)z = 0 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}
\end{aligned}$$

[a] Como en la ecuación (2) $\lambda(2x + z) = 0$ entonces sigue que $\lambda = 0 \vee (2x + z) = 0$.

Caso 1. Si $\lambda = 0$ entonces sustituyendo en las ecuaciones (1) y (3) sigue que

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \implies x = z = 0 \wedge y \in \mathbb{R}$$

En este caso, $(\forall y; y \in \mathbb{R})$, T no es inyectiva, pues:

$$T \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0 \cdot y - 0 \\ 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 - 0 \cdot y + (1 + 0)0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \end{pmatrix} \in \ker(T)$$

Caso 2. Si $\lambda \neq 0$ entonces $(2x + z) = 0$, es decir $z = -2x$ sustituyendo en las ecuaciones (1) y (3) sigue que

$$\begin{cases} 3x + \lambda y = 0 \\ x - \lambda y + (1 + \lambda)(-2x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x + \lambda y = 0 \\ x - \lambda y - 2x - 2\lambda x = 0 \end{cases} \implies x(1 - \lambda) = 0$$

Caso 2.1 $\lambda = 1$ entonces

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ -3x - y = 0 \end{cases} \implies y = -3x \wedge z = -2x$$

En este caso, $(\forall x; x \in \mathbb{R})$, T no es inyectiva, pues:

$$T \begin{pmatrix} x & -2x & -3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2x + 3x \\ 2x - 2x \\ x + 3x - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x & -3x & -2x \end{pmatrix} \in \ker(T)$$

Caso 2.2 $\lambda \neq 1$ entonces $x = 0$ y como $z = -2x$ entonces $z = 0$, luego sustituyendo en las ecuaciones obtenemos que $\lambda y = 0$ y como $\lambda \neq 0$ entonces $y = 0$ y T es inyectiva

[b] Finalmente,

$$\mathbb{S} = \{0, 1\}$$

4. Sea $f : (\mathbb{R}^3, +) \mapsto (\mathbb{R}^3, +)$ un homomorfismo de grupos no nulo. Demuestre que

$$[a] \quad \ker(f \circ f) = \mathbb{R}^3 \implies \ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Solución

Etapa 1. Sabemos que $\ker(f) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$. Así que mostrar que $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ significa que "existe $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$, y $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ "

Etapa 2. Gestión de la información

- Como f es un homomorfismo no nulo entonces existe $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ tal que $f(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, (pues sabemos que la condición de homomorfismo, obliga a que, $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$), digamos entonces que $f(u) = v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$
- $\ker(f \circ f) = \mathbb{R}^3$, significa que $(f \circ f)(z) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad (\forall z; z \in \mathbb{R}^3)$. Así que en particular

$$(f \circ f)(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff f(f(u)) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \implies v \in \ker(f)$$

Y como $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ entonces $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$[b] \quad \text{Img}(f \circ f) = \mathbb{R}^3 \implies \text{Img}(f) = \mathbb{R}^3$$

Solución

Etapa 1. Para mostrar que $\text{Img}(f) = \mathbb{R}^3$ debemos verificar que $\text{Img}(f) \subset \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3 \subset \text{Img}(f)$

Etapa 2. Gestión de la información

- Como $f : (\mathbb{R}^3, +) \mapsto (\mathbb{R}^3, +)$ un homomorfismo de grupos entonces en particular, es una función, y por tanto

$$\text{Img}(f) \subset \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

- Así que sólo resta mostrar que $\mathbb{R}^3 \subset \text{Img}(f)$.
- Pero como $\text{Img}(f \circ f) = \mathbb{R}^3$ entonces $\forall z; z \in \mathbb{R}^3$ existe $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $(f \circ f)(x) = z$ entonces

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{R}^3 &\implies (\exists v; v \in \mathbb{R}^3) : (f \circ f)(v) = u \\ &\implies (\exists v; v \in \mathbb{R}^3) : f(f(v)) = u \\ &\implies u \in \text{Img}(f) \end{aligned}$$

Así que,

$$\mathbb{R}^3 \subset \text{Img}(f) \tag{4}$$

Luego de (3) y de (4), sigue que $\text{Img}(f) = \mathbb{R}^3$