Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 1
Profesor Ricardo Santander Baeza
21 de Julio del 2008

[1] Demuestre, usando propiedades (no tablas de verdad), que la siguiente proposición lógica es una Tautología.

$$[\{[\sim p \vee (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)]\} \vee \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\}] \Longleftrightarrow [p \wedge q]$$

Solución

Si llamamos $A = \{[\sim p \vee (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)]\}$ y $B = \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\}$ entonces debemos mostrar que

$$A \vee B \quad \Longleftrightarrow \quad p \wedge q$$

Con esto en mente, por una parte, tenemos que,

$$\begin{aligned} A &\Longleftrightarrow \{[\sim p \vee (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)]\} \\ &\Longleftrightarrow \{[(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r)] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r)]\} \\ &\Longleftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (p \wedge r)] \\ &\Longleftrightarrow [\sim (p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [(\sim p \vee q) \wedge \sim (p \wedge r) \wedge (p \wedge r)] \\ &\Longleftrightarrow C \vee C \qquad\qquad (\ C \text{ significa contradicción}) \\ &\Longleftrightarrow C \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} B &\Longleftrightarrow \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\} \\ &\Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee [[(r \wedge \sim r) \vee (r \wedge q)] \wedge p] \\ &\Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee [(r \wedge q) \wedge p] \\ &\Longleftrightarrow (p \wedge q) \end{aligned}$$

Así que, como conclusión tenemos que:

$$\begin{aligned} [\{[\sim p \vee (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (\sim q \vee r)]\} \vee \{(p \wedge q) \vee [r \wedge (\sim r \vee q) \wedge p]\}] &\Longleftrightarrow A \vee B \\ &\Longleftrightarrow C \vee (p \wedge q) \\ &\Longleftrightarrow (p \wedge q) \end{aligned}$$

[2] Usando inducción Matemática, demuestre que la fórmula:

$$\text{F(n)} \ : \qquad 2 + \sum_{j=1}^{n} 3 \cdot (-1)^j \cdot 2^j = (-1)^n \cdot 2^{n+1} \qquad \text{es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $F(1)$ es verdadera

Por una parte,

$$2+\sum_{j=1}^{1} 3\cdot(-1)^j\cdot 2^j \quad = \quad 2-6=-4$$

Pot otra parte,

$$(-1)^1\cdot 2^{1+1} \quad = \quad -4$$

Así que

$$2+\sum_{j=1}^{1} 3\cdot(-1)^j\cdot 2^j \quad = \quad (-1)^1\cdot 2^{1+1}$$

Y $F(1)$ es verdadera

Etapa 2. Supongamos como hipótesis de inducción que $F(n)$ e verdadera, es decir:

$$2+\sum_{j=1}^{n} 3\cdot(-1)^j\cdot 2^j \quad = \quad (-1)^n\cdot 2^{n+1} \qquad (H)$$

Etapa 3. Por demostrar entonces que $F(n+1)$ es verdadera, es decir, por demostrar que

$$2+\sum_{j=1}^{n+1} 3\cdot(-1)^j\cdot 2^j = (-1)^{n+1}\cdot 2^{(n+1)+1} = (-1)^{n+1}\cdot 2^{(n+2)}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
2+\sum_{j=1}^{n+1} 3\cdot(-1)^j\cdot 2^j &= 2+\sum_{j=1}^{n} 3\cdot(-1)^j\cdot 2^j+\sum_{j=n+1}^{n+1} 3\cdot(-1)^j\cdot 2^j \\
&= 2+\sum_{j=1}^{n} 3\cdot(-1)^j\cdot 2^j+3\cdot(-1)^{n+1}\cdot 2^{n+1} \\
&\overset{(H)}{=} (-1)^n\cdot 2^{n+1}+3\cdot(-1)^{n+1}\cdot 2^{n+1} \\
&= ((-1)^n+3\cdot(-1)^{n+1})2^{n+1} \\
&= ((-1)^n-3\cdot(-1)^n)2^{n+1} \\
&= (-2(-1)^n)2^{n+1} \\
&= (-1)^{n+1}\cdot 2^{n+2}
\end{aligned}$$

Luego, $F(n+1)$ es verdadera y entonces la fórmula $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n\in\mathbb{N})$

[3] Si $G=\{a,10,c,\dots\}$ es una progresión geométrica y $A=\{a-1,8,c-8,\dots\}$ es una progresión artimética

[a] Determine ambas progresiones

Solución

Etapa 1. Debemos determinar G A

Etapa 2. Gestión de la información

[i] $G = \{a, 10, c, \dots\}$ es una progresión geométrica si y sólo si existe $r \in (\mathbb{R} - \{0, 1\})$ tal que

$$G = \left\{ \frac{10}{r}, 10, 10r, \dots \right\}$$

Y entonces

$$A = \left\{ \frac{10}{r} - 1, 8, 10r - 8, \dots \right\}$$

[ii] $A = \left\{ \dfrac{10}{r} - 1, 8, 10r - 8, \dots \right\}$ es una progresión aritmética si y sólo si

$$\begin{aligned}
8 - \left(\frac{10}{r} - 1\right) = 10r - 8 - 8 \quad & \Longleftrightarrow \quad 9 - \frac{10}{r} = 10r - 16 \\
& \Longleftrightarrow \quad 9r - 10 = 10r^2 - 16r \\
& \Longleftrightarrow \quad 10r^2 - 25r + 10 = 0 \\
& \Longrightarrow \quad \frac{25 \pm \sqrt{625 - 400}}{20} \\
& \Longrightarrow \quad r = \begin{cases} \dfrac{25 + \sqrt{225}}{20} & = 2 \\ \text{ó} \\ \dfrac{25 - \sqrt{225}}{20} & = \dfrac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Etapa 3. Conclusión Tenemos dos casos:

[i] Caso 1: $r = 2$ entonces $G = \{5, 10, 20, \dots\}$ y $A = \{4, 8, 12, \dots\}$

[ii] Caso 1: $r = \dfrac{1}{2}$ entonces $G = \{20, 10, 5, \dots\}$ y $A = \{19, 8, -3, \dots\}$

[b] Calcule la suma de los 50 primeros términos de la progresión aritmética A

Solución

Etapa 1. Debemos calcular S_{50}, suma de los 50 primeros términos de la progresión aritmética A.

Etapa 2. Gestión de la información

En general para una progresión aritmética $S_{50} = \dfrac{50}{2}(2a_1 + 49d)$. Así que usando el resultado obtenido en el item anterior tenemos:

[i] Si $r = 2$ entonces $A = \{4, 8, 12, \dots\}$, es decir $d = 4$ y $a_1 = 4$, por tanto

$$S_{50} \quad = \quad 25(8 + 196) = 5100$$

[ii] Si $r = \dfrac{1}{2}$ entonces $A = \{19, 8, -3, \dots\}$, es decir $d = -11$ y $a_1 = 19$, por tanto

$$S_{50} \quad = \quad 25(38 - 539) = -12525$$

[4] Determine, si es posible, el término que contiene x^{18} en el desarrollo de la expresión binomial:

$$\left(\frac{1}{x^6}+1+x^6\right)\left(2x^3-\frac{1}{x^3}\right)^8$$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar el término que contiene a x^{18}.

Etapa 2. Gestión de la información

[a] Sabemos que:

$$\begin{aligned}\left(2x^3-\frac{1}{x^3}\right)^8 &= \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\left(2x^3\right)^{8-k}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{8}(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot\binom{8}{k}x^{24-6k}\end{aligned}$$

[b] Luego,

$$\left(\frac{1}{x^6}+1+x^6\right)\left(2x^3-\frac{1}{x^3}\right)^8 = \left(\frac{1}{x^6}+1+x^6\right)\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot\binom{8}{k}x^{24-6k}$$

$$=\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot\binom{8}{k}x^{18-6k}+\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot\binom{8}{k}x^{24-6k}+\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot\binom{8}{k}x^{30-6k}$$

Debemos imponer por tanto para las sumas 1,2 y 3 respectivamente

$$\begin{cases}18-6k=18\Leftrightarrow 6k=0\Leftrightarrow k=0\\ 24-6k=18\Leftrightarrow 6k=6\Leftrightarrow k=1\\ 30-6k=18\Leftrightarrow 6k=12\Leftrightarrow k=2\end{cases}$$

Luego, el término pedido es

$$T = 2^8\cdot\binom{8}{0}x^{18}-2^7\cdot\binom{8}{1}x^{18}+2^6\cdot\binom{8}{2}x^{18}=\left(2^8\cdot\binom{8}{0}-2^7\cdot\binom{8}{1}+2^6\cdot\binom{8}{2}\right)x^{18}$$