Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución PAS
Profesor Ricardo Santander Baeza
29 de Septiembre del 2008

[1] Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula:

$$F(n): \quad 3^{2(n+1)}5^{2n} - 3^{3(n+1)-1}2^{2n} \text{ es divisible por 1.053 es verdadera } (\forall n : n \in \mathbb{N})$$

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $3^{2(n+1)}5^{2n} - 3^{3(n+1)-1}2^{2n}$ es divisible por 1.053 $(\forall n : n \in \mathbb{N})$

Etapa 2. Gestión de la información

[a] Observamos que

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)}5^{2n} - 3^{3(n+1)-1}2^{2n} &= 3^{(2n+2)}5^{2n} - 3^{(3n+2)}2^{2n} \\ &= 9 \cdot 3^{2n}5^{2n} - 9 \cdot 3^{3n}2^{2n} \end{aligned}$$

Así tenemos que $F(n): \quad 9 \cdot 3^{2n}5^{2n} - 9 \cdot 3^{3n}2^{2n}$

[b] Por demostrar que $F(1)$ es verdadera.

En efecto

$9 \cdot 3^{2\cdot 1}5^{2\cdot 1} - 9 \cdot 3^{3\cdot 1}2^{2\cdot 1} = 9 \cdot 9 \cdot 25 - 9 \cdot 27 \cdot 4 = 2025 - 972 = 1053 = 1053 \cdot 1.$ Así que $F(1)$ es verdadero.

[c] Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera, es decir asumimos que existe un número, digamos k tal que

$$9 \cdot 3^{2n}5^{2n} - 9 \cdot 3^{3n}2^{2n} = 1053 \cdot k \qquad (H)$$

[d] Tesis de Inducción

Debemos demostrar que $F(n+1)$ es verdadera, es decir debemos probar que existe un número q tal que

$$9 \cdot 3^{2(n+1)}5^{2(n+1)} - 9 \cdot 3^{3(n+1)}2^{2(n+1)} = 1053 \cdot q$$

En efecto

En primer lugar,

$$\begin{aligned} 9 \cdot 3^{2(n+1)}5^{2(n+1)} - 9 \cdot 3^{3(n+1)}2^{2(n+1)} &= 9 \cdot 3^{(2n+2)}5^{(2n+2)} - 9 \cdot 3^{(3n+3)}2^{(2n+2)} \\ &= 81 \cdot 3^{2n} \cdot 25 \cdot 5^{2n} - 243 \cdot 3^{3n} \cdot 4 \cdot 2^{2n} \\ &= 2025 \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n} - 972 \cdot 3^{3n} \cdot 2^{2n} \end{aligned}$$

En segundo lugar,

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

$$\begin{array}{lcl} 2025 \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n} - 972 \cdot 3^{3n} \cdot 2^{2n} & : & 9 \cdot 3^{2n}5^{2n} - 9 \cdot 3^{3n}2^{2n} = 225 \\ 2025 \cdot 3^{2n}5^{2n} - 2025 \cdot 3^{3n}2^{2n} & & \\ - - - - - - - - - - - - - & & \\ 1053 \cdot 3^{3n}2^{2n} & & \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 2025 \cdot 3^{2n} \cdot 5^{2n} - 972 \cdot 3^{3n} \cdot 2^{2n} &= 225(9 \cdot 3^{2n}5^{2n} - 9 \cdot 3^{3n}2^{2n}) + 1053 \cdot 3^{3n}2^{2n} \\ &\overset{H}{=} 225 \cdot 1053 \cdot k + 1053 \cdot 3^{3n}2^{2n} \\ &= 1053\underbrace{(225 \cdot k + 3^{3n}2^{2n})}_{q} \end{aligned}$$

Así que, $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

[2] Si se tienen tres términos no nulos en progresión geométrica, y se resta 8 del segundo término se obtiene una progresión aritmética, y si en "esta progresión aritmética" se resta 64 del tercer término resulta nuevamente una progresión geométrica. Determine, si es posible, todas las progresiones involucradas en el problema.

Solución

Etapa 1. Sean $G = \{x, y, z\}$, $A = \{x, y-8, z\}$ y $G' = \{x, y-8, z-64\}$ las progresiones geométrica, aritmética y geométrica respectivamente, pedidas.

Etapa 2. Gestión de la información

[a] G es una progresión geométrica si y sólo si existe $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ y $r \neq 1$ tal que

$$G = \{x, xr, xr^2\}$$

Luego,

$$A = \{x, xr-8, xr^2\} \quad \wedge \quad G' = \{x, xr-8, xr^2-64\}$$

[b] $A = \{x, xr-8, xr^2\}$ es una progresión aritmética si y sólo si $xr - 8 - x = xr^2 - (xr-8)$, es decir:

$$\begin{aligned} xr - 8 - x = xr^2 - (xr-8) &\iff xr^2 - 2xr + x + 16 = 0 \\ &\iff x(1 - 2r + r^2) = -16 \end{aligned}$$

Luego,

$$x(1 - 2r + r^2) = -16 \tag{1}$$

[c] $G' = \{x, xr - 8, xr^2 - 64\}$ es una progresión geométrica si y sólo si

$$\begin{aligned}
\frac{xr-8}{x} = \frac{xr^2-64}{xr-8} &\iff (xr-8)^2 = x(xr^2-64)\\
&\iff x^2r^2 - 16xr + 64 = x^2r^2 - 64x\\
&\iff 64x - 16xr + 64 = 0\\
&\iff 4x - xr + 4 = 0
\end{aligned}$$

Luego,

$$x(4-r) = -4 \tag{2}$$

Etapa 3. Conclusiones

Como la progresión geométrica es no nula entonces de las ecuaciones (1) y (2) sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{x(1-2r+r^2)}{x(16-4r)} = \frac{-16}{-16} &\implies \frac{(1-2r+r^2)}{(16-4r)} = 1\\
&\implies 1 - 2r + r^2 = 16 - 4r\\
&\implies r^2 + 2r - 15 = 0\\
&\implies (r+5)(r-3) = 0\\
&\implies r = 3 \vee r = -5
\end{aligned}$$

Así que, tenemos dos casos:

Caso 1. Si $r = 3$ de (2) sigue que $x = -4$ y entonces

$$\begin{array}{lcllcl}
G & = & \{x, xr, xr^2\} & = & \{-4, -12, -36\} & (\text{ Progresión geométrica de razón } 3)\\
A & = & \{x, xr-8, xr^2\} & = & \{-4, -20, -36\} & (\text{ Progresión aritmética de diferencia } -16)\\
G' & = & \{x, xr-8, xr^2-64\} & = & \{-4, -20, -100\} & (\text{ Progresión geométrica de razón } 5)
\end{array}$$

Caso 2. Si $r = -5$ de (2) sigue que $x = -\dfrac{4}{9}$ y entonces

$$\begin{array}{lcllcl}
G & = & \{x, xr, xr^2\} & = & \left\{-\dfrac{4}{9}, \dfrac{20}{9}, -\dfrac{100}{9}\right\} & (\text{ Progresión geométrica de razón } -5)\\
A & = & \{x, xr-8, xr^2\} & = & \left\{-\dfrac{4}{9}, -\dfrac{52}{9}, -\dfrac{100}{9}\right\} & \left(\text{Progresión aritmética de diferencia } -\dfrac{48}{9}\right)\\
G' & = & \{x, xr-8, xr^2-64\} & = & \left\{-\dfrac{4}{9}, -\dfrac{52}{9}, -\dfrac{676}{9}\right\} & \left(\text{Progresión geométrica de razón } \dfrac{13}{9}\right)
\end{array}$$

[3] Demuestre que el coeficiente de x^3 en el desarrollo binomial $(2 + 2x + x^2)^n$. Es de la forma

$$\frac{n(n^2-1)2^{n-1}}{3}$$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar el coeficiente de x^3 en el desarrollo binomial $(2+2x+x^2)^n$

Etapa 2. Gestión de la información

[a] Del teorema del binomio sigue que

$$\begin{aligned}
(2+2x+x^2)^n &= ((2+2x)+x^2)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2+2x)^{n-k}(x^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(1+x)^{n-k}(x^2)^k \\
&= \binom{n}{0}2^n(1+x)^n+\binom{n}{1}2^{n-1}(1+x)^{n-1}x^2+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(1+x)^{n-k}(x^2)^k \\
&= 2^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k+n2^{n-1}x^2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(1+x)^{n-k}x^{2k}
\end{aligned}$$

Luego del desarrollo obtenemos que

$$\begin{aligned}
2^n\binom{n}{3}x^3+n2^{n-1}x^2\binom{n-1}{1}x &= \left(2^n\binom{n}{3}+n2^{n-1}\binom{n-1}{1}\right)x^3 \\
&= 2^{n-1}\left(2\binom{n}{3}+n\binom{n-1}{1}\right)x^3 \\
&= 2^{n-1}\left(2\frac{n!}{3!(n-3)!}+n(n-1)\right)x^3 \\
&= 2^{n-1}\left(2\frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{6(n-3)!}+n(n-1)\right)x^3 \\
&= 2^{n-1}\left(\frac{(n-2)(n-1)n}{3}+n(n-1)\right)x^3 \\
&= 2^{n-1}(n-1)n\left(\frac{(n-2)}{3}+1\right)x^3 \\
&= 2^{n-1}(n-1)n\left(\frac{(n-2+3)}{3}\right)x^3 \\
&= 2^{n-1}\,\frac{n(n-1)(n+1)}{3}\,x^3 \\
&= 2^{n-1}\,\frac{n(n^2-1)}{3}\,x^3
\end{aligned}$$

Por tanto el coeficiente de x^3 es $\left[2^{n-1}\,\dfrac{n(n^2-1)}{3}\right]$

[4] Considere la función $h:(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2),+)\longmapsto(\mathbb{R}_2[x],+)$ definida por: $h\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(a-d)+(b-c)x+dx^2$

[a] Demuestre que h es un homomorfismo

Solución

Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
h(A+B) &= h\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\
&= ((a+a')-(d+d')) + ((b+b')-(c+c'))x + (d+d')x^2 \\
&= (a-d) + (b-c)x + dx^2 + (a'-d') + (b'-c')x + d'x^2 \\
&= h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \\
&= h(A) + h(B)
\end{aligned}$$

Así que h es un homomorfismo de grupos.

[b] Demuestre que h no es inyectivo

En efecto

$$\begin{aligned}
A \in \ker(h) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h(A) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (a-d) + (b-c)x + dx^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (a-d) = 0 \wedge (b-c) = 0 \wedge d = 0 \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = d = 0 \wedge b = c \\
&\iff A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \wedge b \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Así que

$$\ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Por tanto, h no es inyectivo.

[c] Si definimos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ la relación

$$A \Re B \iff (A - B) \in \ker(h)$$

Demuestre que $\Re$ es simétrica
Solución

Consideremos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y supongamos que $A \Re B$ entonces

$$
\begin{aligned}
A\Re B &\Longrightarrow (A-B)\in ker(h)\\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} a-a' & b-b' \\ c-c' & d-d' \end{pmatrix}\in ker(h)\\
&\Longrightarrow a-a'=0\wedge d-d'=0\wedge b-b'=c-c'\\
&\Longrightarrow a'-a=0\wedge d'-d=0\wedge b'-b=c'-c\\
&\Longrightarrow a'-a=0\wedge d'-d=0\wedge b'-b=c'-c\\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} a'-a & b'-b \\ c'-c & d'-d \end{pmatrix}\in \ker(h)\\
&\Longrightarrow (B-A)\in \ker(h)\\
&\Longrightarrow B\Re A
\end{aligned}
$$

Luego, h es una relación simétrica