Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Solución Examen 2 de Álgebra[1]
Profesor Ricardo Santander Baeza
10 de Marzo del 2009

[1] Sea $f : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $f(A) = A - \lambda A^t$

[a] Demuestre que f es un homomorfismo de Grupos, $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$

Solución
Si consideramos $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces debemos mostrar que $f(A+B) = f(A) + f(B)$, $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$

En efecto, de la definición y estructura de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ sigue que:

$$\left.\begin{array}{lcl} A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) & \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) & \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Así que, aplicando la definición de la función f y el hecho de que la Trasposición es homomorfismo de grupos tenemos que:

$$\begin{aligned} f(A+B) &= f\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}^t \\ &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) - \lambda \left[\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right)^t \right] \\ &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) - \lambda \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^t \right] \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^t \\ &= f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= f(A) + f(B) \end{aligned}$$

Por tanto f es un homomorfismo de grupos.

[b] Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f \text{ es un homomorfismo de grupos inyectivo}\}$$

Solución

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{S} &\Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \wedge f \text{ es un homomorfismo de grupos inyectivo} \\ &\Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \wedge \ker(f) = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\} \end{aligned}$$

Estudiemos entonces el $\ker(f)$.

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

$$
\begin{aligned}
A \in \ker(f) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge f(A) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\\
&\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A - \lambda A^t = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\\
&\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A = \lambda A^t\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^t\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21}\\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22}\end{pmatrix}\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_{11} & = & \lambda a_{11}\\ a_{12} & = & \lambda a_{21}\\ a_{21} & = & \lambda a_{12}\\ a_{22} & = & \lambda a_{22}\end{array}\right|\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{lcl} (\lambda-1)a_{11} & = & 0\\ (\lambda^2-1)a_{12} & = & 0\\ (\lambda-1)a_{22} & = & 0\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \wedge \begin{array}{l} (\lambda = 1 \vee a_{11} = 0)\\ (\lambda = 1 \vee \lambda = -1 \vee a_{12} = 0)\\ (\lambda = 1 \vee a_{22} = 0)\end{array}
\end{aligned}
$$

Luego, para que f sea inyectiva $\lambda \neq \pm 1$, es decir

$$\mathbb{S} \quad = \quad \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

[2] Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del $\mathbb{R}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$. Si $\beta = \{w_1, w_2 \dots, w_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $w_s = \sum_{i=1}^{s} \lambda v_i$ para $i = 1, 2, \dots n$ entonces determine el conjunto

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \beta \text{ es una base de } \mathbb{V}\}$$

Solución

Como la dimensión de $\mathbb{V}$ es n entonces β será una base si es linealmente independiente o un sistema de generadores. Por tanto verificaremos la independencia lineal.

Si suponemos que $\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = 0_{\mathbb{V}}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = 0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow a_1\lambda v_1 + a_2(\lambda v_1 + \lambda v_2) + a_3(\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3) + \cdots + a_n(\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 + \cdots + v_n) = 0_{\mathbb{V}}\\
&\Longrightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\lambda v_1 + (a_2 + \cdots + a_n)\lambda v_2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)\lambda v_{n-1} + a_n\lambda v_n = 0_{\mathbb{V}}\\
&\Longrightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\lambda = (a_2 + \cdots + a_n)\lambda = \cdots = (a_{n-1} + a_n)\lambda = a_n\lambda = 0 \quad (\alpha \text{ base})
\end{aligned}
$$

Así que para que $a_1, a_2, \dots, a_n$ seam forzosamente nulos debe ocurrir que $\lambda \neq 0$, es decir

$$\Lambda = \mathbb{R} - \{0\}$$

[3] En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ define para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2) \tag{1}$$

Si $\alpha = \{1, 1-x, 1-x^2\}$ base de $\mathbb{R}^2[x]$ entonces determine una base ortonormal respecto del producto interno definido en (1)
Solución

Como,

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1-x\rangle &= 1\cdot(1-0)+1\cdot(1-1)+1\cdot(1-2) = 1+0+(-1) = 0\\
\langle 1, 1-x^2\rangle &= 1\cdot(1-0)+1\cdot(1-1)+1\cdot(1-4) = 1+0+(-3) = -2\\
\langle 1-x, 1-x^2\rangle &= (1-0)\cdot(1-0)+(1-1)\cdot(1-1)+(1-2)\cdot(1-4) = 1+0+3 = 4
\end{aligned}$$

entonces α no es una base ortogonal. Así que ortogonalizamos

$$\begin{aligned}
\text{Sea } v_1' &= 1\\
v_2' &= (1-x) - \frac{\langle (1-x), 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1 = 1-x\\
v_3' &= (1-x^2) - \frac{\langle (1-x^2),(1-x)\rangle}{\langle (1-x),(1-x)\rangle}\cdot(1-x) - \frac{\langle (1-x^2),1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1 = (1-x^2) - \frac{4}{2}\cdot(1-x) - \frac{-2}{3}\cdot 1\\
&= -\frac{1}{3} + 2x - x^2
\end{aligned}$$

Así que, una base ortogonal es

$$\alpha' = \left\{1, 1-x, -\frac{1}{3}+2x-x^2\right\}$$

Finalmente la base ortonormal pedida es

$$\alpha'' = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1-x}{2}, \frac{-1+6x-3x^2}{2}\right\}$$

[4] Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial con producto interno $\langle,\rangle$ y $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ para cada $u \in \mathbb{V}$ entonces demuestre que

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

Solución

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle\\
&= \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle - (\langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle)\\
&= 4\langle u,v\rangle
\end{aligned}$$

así que,

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$