

Solución Examen 1 de Álgebra¹
Profesor Ricardo Santander Baeza
12 de Enero del 2009

[1] Dado el sistema lineal

$$\begin{array}{rcl} x + y - z & = & 2 \\ x + 2y + z & = & 3 \\ x + y + (\alpha^2 - 5)z & = & \alpha \end{array} \quad (*)$$

Si $\mathbb{S} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene solución}\}$ entonces demuestre que $\{-2\} \cap \mathbb{S} = \emptyset$

Solución 1.

$$\{-2\} \cap \mathbb{S} \neq \emptyset \implies -2 \in \mathbb{S} \implies \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 2 \\ x + 2y + z & = & 3 \\ x + y - z & = & -2 \end{array} \implies 2 = -2 (\implies \Leftarrow)$$

Solución 2

Etapla 1. La matriz ampliada del sistema $(A|B)$ es

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & (\alpha^2 - 5) & \alpha \end{array} \right)$$

Etapla 2. haciendo operaciones elementales de fila obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 & \alpha - 2 \end{array} \right)$$

Etapla 3. Si hacemos $\alpha = -2$ entonces $\rho(A) = 2 < \rho(A|B) = 3$. Pues

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

Así que $(*)$ no tiene solución si $\alpha = -2$

¹Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

[2] Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces demuestre que

$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)) \Rightarrow \beta\{(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$

Solución

Si $x_1(a_{11}, a_{12}, a_{13}) + x_2(a_{21}, a_{22}, a_{23}) + x_3(a_{31}, a_{32}, a_{33}) = (0, 0, 0)$ entonces

$$\begin{array}{rcl} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + x_3 a_{31} & = & 0 \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + x_3 a_{32} & = & 0 \\ x_1 a_{13} + x_2 a_{23} + x_3 a_{33} & = & 0 \end{array} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusión

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así que

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)) \Rightarrow A^t \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^t \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego β es linealmente independiente.

[3] Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$. Si $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base del espacio $\mathbb{V}$ y $\beta =$

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $u_s = \sum_{i=1}^s v_{s+1-i}$, para $s = 1, 2, \dots, n$ entonces

[a] Demuestre que α base de $\mathbb{V} \implies \beta$ base de $\mathbb{V}$

En primer lugar observamos que los elementos de la base β son de la forma:

$$\begin{array}{llll} u_1 & = & \sum_{i=1}^1 v_{1+1-i} & = v_1 & \iff & v_1 & = & u_1 \\ u_2 & = & \sum_{i=1}^2 v_{2+1-i} & = v_2 + v_1 & \iff & v_2 & = & u_2 - u_1 \\ u_3 & = & \sum_{i=1}^3 v_{3+1-i} & = v_3 + v_2 + v_1 & \iff & v_3 & = & u_3 - u_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ u_j & = & \sum_{i=1}^j v_{j+1-i} & = v_j + v_{j-1} + \dots + v_1 & \iff & v_j & = & u_j - u_{j-1} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ u_n & = & \sum_{i=1}^n v_{n+1-i} & = v_n + v_{n-1} + \dots + v_1 & \iff & v_n & = & u_n - u_{n-1} \end{array} \quad (1)$$

En segundo lugar, mostramos que β linealmente independiente.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n a_j u_j = 0 &\iff a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = 0 \\
 &\iff a_1 v_1 + a_2(v_2 + v_1) + \cdots + a_n(v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1) = 0 \\
 &\iff (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)v_1 + (a_2 + a_3 + \cdots + a_n)v_2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)v_{n-1} + a_n v_n = 0 \\
 &\iff \left. \begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + \cdots + a_n & = & 0 \\ a_2 + \cdots + a_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{n-1} + a_n & = & 0 \\ a_n & = & 0 \end{array} \right\} \implies a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0
 \end{aligned}$$

Así que β es linealmente independiente.

En tercer lugar, mostramos que β es un sistema de generadores.

Si $u \in \mathbb{V}$ entonces como α es una base entonces existen únicos escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ tales que $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$, pero de acuerdo con (1) tenemos que

$$\begin{aligned}
 u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n &\Rightarrow u = a_1 u_1 + a_2(u_2 - u_1) + \cdots + a_n(u_n - u_{n-1}) \\
 &\Rightarrow u = (a_1 - a_2)u_1 + (a_2 - a_3)u_2 + \cdots + (a_{n-1} + a_n)u_{n-1} + a_n u_n
 \end{aligned}$$

Luego β genera $\mathbb{V}$, y por ende es una base de β .

[b] Determine $[I]_{\alpha}^{\beta}$ la matriz cambio de la base α para la base β

Solución

De (1), sigue que

$$\begin{aligned}
 v_1 &= u_1 + 0u_2 + 0u_3 + \cdots + 0u_n \\
 v_2 &= -u_1 + u_2 + 0u_3 + \cdots + u_n \\
 &\vdots \\
 v_n &= 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + \cdots + u_n
 \end{aligned} \tag{2}$$

Por tanto, de (2) tenemos que

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

[4] Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tal que $T(x, y, z) = x + 2y - 3z$

[a] Si se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto interno canónico entonces determine $(\ker(T))^{\perp}$

Solución

Sabemos que

$$(\ker(T))^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, w \rangle = 0 \ (\forall w; w \in \ker(T))\}$$

Luego, lo primero que debemos hacer es determinar $\ker(T)$

$$\begin{aligned}
w \in \ker(T) &\iff w \in \mathbb{R}^3 \wedge T(w) = 0_{\mathbb{R}} \\
&\iff w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge T(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}} \\
&\iff w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x + 2y - 3z = 0 \\
&\iff w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = 3z - 2y \\
&\iff w = (3z - 2y, y, z); y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \\
&\iff w = z(3, 0, 1) + y(-2, 1, 0); y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \\
&\iff w \in \langle \{(3, 0, 1), (-2, 1, 0)\} \rangle
\end{aligned}$$

Luego,

$$\ker(T) = \langle \{(3, 0, 1), (-2, 1, 0)\} \rangle$$

Como $\alpha = \{(3, 0, 1), (-2, 1, 0)\}$ es un conjunto linealmente independiente, pues

$$a_1(3, 0, 1) + a_2(-2, 1, 0) = (0, 0, 0) \implies (3a_1 - 2a_2, a_2, a_1) = (0, 0, 0) \implies a_1 = a_2 = 0$$

entonces α es una base del $\ker(T)$, y podemos proceder a calcular $(\ker(T))^\perp$

$$\begin{aligned}
u \in (\ker(T))^\perp &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle u, w \rangle = 0 \ (\forall w; w \in \ker(T)) \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge \langle (x, y, z), (3, 0, 1) \rangle = 0 \wedge \langle (x, y, z), (-2, 1, 0) \rangle = 0 \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge 3x + z = 0 \wedge -2x + y = 0 \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge 3x + z = 0 \wedge -2x + y = 0 \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge z = -3x \wedge y = 2x \\
&\iff u = (x, 2x, -3x) \wedge x \in \mathbb{R} \\
&\iff u = x(1, 2, -3) \wedge x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Luego,

$$(\ker(T))^\perp = \langle \{(1, 2, -3)\} \rangle$$

[b] Demuestre que $\mathbb{R}^3 = \ker(T) \oplus (\ker(T))^\perp$

Solución

Si llamamos $\beta = \{(3, 0, 1), (-2, 1, 0), (1, 2, -3)\}$ entonces como $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3 entonces basta mostrar que β genera $\mathbb{R}^3$, es decir debemos resolver la ecuación

$$(x, y, z) = a_1(3, 0, 1) + a_2(-2, 1, 0) + a_3(1, 2, -3)$$

En efecto

$$\begin{aligned}
(x, y, z) = a_1(3, 0, 1) + a_2(-2, 1, 0) + a_3(1, 2, -3) &\iff (x, y, z) = (3a_1 - 2a_2 + a_3, a_2 + 2a_3, a_1 - 3a_3) \\
&\iff \left. \begin{array}{rcl} 3a_1 - 2a_2 + a_3 & = & x \\ a_2 + 2a_3 & = & y \\ a_1 - 3a_3 & = & z \end{array} \right| \\
&\implies a_1 = \frac{3x + 6y + 4z}{13} \\
&\implies a_2 = \frac{-2x + 9y + 6z}{13} \\
&\implies a_3 = \frac{x + 2y - 3z}{13}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$(x, y, z) = \underbrace{\frac{3x + 6y + 4z}{13}(3, 0, 1) + \frac{-2x + 9y + 6z}{13}(-2, 1, 0)}_{\in \ker(T)} + \underbrace{\frac{x + 2y - 3z}{13}(1, 2, -3)}_{\in (\ker(T))^\perp}$$

Y

$$\mathbb{R}^3 = \ker(T) + (\ker(T))^\perp$$

Par concluir falta ver que $\ker(T) \cap (\ker(T))^\perp$

En efecto

$$\begin{aligned}
u \in \ker(T) \cap (\ker(T))^\perp &\iff u \in \ker(T) \wedge u \in (\ker(T))^\perp \\
&\iff u \in \ker(T) \wedge \langle u, u \rangle = 0 \\
&\iff u = (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

De donde

$$\mathbb{R}^3 = \ker(T) \oplus (\ker(T))^\perp$$