Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep N°4 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
26 de noviembre del 2007

1. Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a_0 + a_1 - 3a_2 = 0\} \subset \mathbb{R}_2[x]$, y para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ definimos el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2) \qquad (*)$$

entonces

1.1 Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$.

Solución

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \ \wedge \ a_0 + a_1 - 3a_2 = 0\\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \ \wedge \ a_0 = 3a_2 - a_1\\
&\iff p(x) = (3a_2 - a_1) + a_1x + a_2x^2; \quad (a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R})\\
&\iff p(x) = a_1(x-1) + a_2(3+x^2); \quad (a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R})\\
&\iff p(x) \in \langle\{(x-1), (3+x^2)\}\rangle
\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{W} = \langle\{(x-1), (3+x^2)\}\rangle \leq \mathbb{R}_2[x]$

1.2 Respecto del producto interno definido en $(*)$. Determine $P_{\mathbb{W}}$, la proyección ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ en el subespacio $\mathbb{W}$.

Solución

Etapa 1. Si llamamos $\alpha = \{(x-1), (3+x^2)\}$ entonces α es linealmente independiente, pues

$$a(x-1) + b(3+x^2) = 0 + 0x + 0x^2 \Longrightarrow (3b-a) + ax + bx^2 = 0 + 0x + 0x^2 \Longrightarrow a = b = 0$$

Así que α es una base de $\mathbb{W}$.

Etapa 2. Verifiquemos si α es una base ortogonal respecto del producto interno $(*)$.

$$\langle x-1, 3+x^2\rangle = (0-1)(3+0^2) + (1-1)(3+1^2) + (2-1)(3+2^2) = (-1)(3) + (0)(4) + (1)(7) = 4 \neq 0$$

Así que, α no es una base ortogonal de $\mathbb{W}$. Por tanto la ortogalizamos vía el proceso de Gram Schmidt, y para ello construimos $p_1(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $p_2(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ como sigue,

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x-1\\
p_2(x) &= (3+x^2) - \frac{\langle(3+x^2), (x-1)\rangle}{\|(x-1)\|^2}\,(x-1) = (3+x^2) - \frac{4}{2}\,(x-1) = 3 + x^2 - 2x + 2 = 5 - 2x + x^2
\end{aligned}$$

Ahora, $\alpha' = \{x-1, 5-2x+x^2\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{W}$, pues $(5-2x+x^2) \in \mathbb{W}$ ya que 5-2-3=0, y

$$\langle(x-1), (5-2x+x^2)\rangle = (0-1)(5-2\cdot 0+0^2) + (1-1)(5-2+1) + (2-1)(5-4+4) = -5+5 = 0$$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Etapa 3. Definimos la proyección ortogonal.

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(a_0+a_1x+a_2x^2) &= \frac{\langle a_0+a_1x+a_2x^2, x-1\rangle}{\|(x-1)\|^2}\,(x-1)+\frac{\langle a_0+a_1x+a_2x^2, 5-2x+x^2\rangle}{\|(5-2x+x^2)\|^2}\,(5-2x+x^2)\\
&= \frac{2a_1+4a_2}{2}\,(x-1)+\frac{14a_0+14a_1+24a_2}{66}\,(5-2x+x^2)\\
&= (a_1+2a_2)(x-1)+\frac{7a_0+7a_1+12a_2}{33}\,(5-2x+x^2)
\end{aligned}
$$

Así que,

$$
P_{\mathbb{W}}(a_0+a_1x+a_2x^2) = \frac{(35a_0+2a_1-6a_2)+(-14a_0+19a_1+42a_2)x+(7a_0+7a_1+12a_2)x^2}{33}
$$

Etapa 4. Comprobamos: Es opcional pero es una buena práctica dentro de todo proceso de gestión.

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}}(-1+x+0x^2) &= \frac{-33+33x}{33}=x-1 \quad OK!!!\\
P_{\mathbb{W}}(5-2x+x^2) &= \frac{165-66x+33x^2}{33}=(5-2x+x^2) \quad OK!!!
\end{aligned}
$$

2.1 Determine $T\in\mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4,\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

- $\mathrm{Img(T)}=\{A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\mid A=-A^t\}$
- T no sea un isomorfismo

Solución

Etapa 1. Debemos determinar $T:\mathbb{R}^4\longmapsto\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ que sea una transformación lineal y satisfaga las condiciones pedidas.

Etapa 2. Gestión de la información.

En primer lugar,

$$
\begin{aligned}
B\in\mathrm{Img(T)} &\iff B\in\{A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\mid A+A^t=(0)\}\\
&\iff B\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge\ B+B^t=(0)\\
&\iff B\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge\ B=-B^t\\
&\iff B=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^t\\
&\iff B=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\\
&\iff B=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & -c\\ -b & -d\end{pmatrix}\\
&\iff B=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge\ (a=d=0\wedge c=-b)\\
&\iff B=\begin{pmatrix} 0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}\ \wedge\ b\in\mathbb{R}\\
&\iff B=b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\ \wedge\ b\in\mathbb{R}\\
&\iff B\in\left\langle\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle
\end{aligned}
$$

Así que, la primera conclusión es que $\mathrm{Img(T)}=\left\langle\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$

Por otra parte, por definición, de función

$$\text{Img(T)} \quad = \quad \{T(x,y,z,t) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\}$$

Así que la segunda conclusión es que si una tal T existe entonces debe ser de la forma

$$T(x,y,z,t) \quad = \quad b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Para algún } b \in \mathbb{R})$$

Finalmente, para encontrar ese tal $b \in \mathbb{R}$, recordamos que para conocer una función basta definirla en una base y extenderla por linealidad, y es lo que haremos. Define T en la base canónica de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} T(1,0,0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ T(0,1,0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ T(0,0,1,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ T(0,0,0,1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned} T(x,y,z,t) &= T(x(1,0,0,0)+y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0)+t(0,0,0,1)) \\ &= xT(1,0,0,0)+yT(0,1,0,0)+zT(0,0,1,0)+tT(0,0,0,1)) \\ &= x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así esta T es una transformación lineal que no es un isomorfismo, porque por ejemplo $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) = 3$. Esto es consecuencia del teorema de la dimensión.

3. Si $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (x+y+2z, x-y-z, x+2y+3z)$, y $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, para $\alpha = \{(1,2,-1),(1,1,-3),(0,1,1)\}$ y $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ entonces

3.1 Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

Solución

Etapa 1. Si $u_1 = (x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$ y $u_2 = (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$. Debemos mostrar que $T(u_1+u_2) = T(u_1)+T(u_2)$.

$$\begin{aligned} T(u_1+u_2) &= T((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) \\ &= T((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) \\ &= (x_1+x_2+y_1+y_2+2z_1+2z_2, x_1+x_2-y_1-y_2-z_1-z_2, x_1+x_2+2y_1+2y_2+3z_1+3z_2) \\ &= (x_1+y_1+2z_1, x_1-y_1-z_1, x_1+2y_1+3z_1)+(x_2+y_2+2z_2, x_2-y_2-z_2, x_2+2y_2+3z_2) \\ &= T((x_1,y_1,z_1))+T((x_2,y_2,z_2)) \\ &= T(u_1)+T(u_2) \end{aligned}$$

Etapa 2. Si $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Debemos mostrar que $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

$$\begin{aligned}
T(\lambda u) &= T(\lambda(x,y,z)) \\
&= T((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) \\
&= (\lambda x + \lambda y + 2\lambda z, \lambda x - \lambda y - \lambda z, \lambda x + 2\lambda y + 3\lambda z) \\
&= (\lambda(x+y+2z), \lambda(x-y-z), \lambda(x+2y+3z)) \\
&= \lambda(x+y+2z, x-y-z, x+2y+3z) \\
&= \lambda T(x,y,z) \\
&= \lambda T(u)
\end{aligned}$$

Luego, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$

3.2 Determine , si es posible, la base β.

Solución

Etapa 1. Debemos determinar la base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Etapa 2. Gestión de la información

Por definición $[T]_\alpha^\beta = ([T(1,2,-1)]_\beta \quad [T(1,1,-3)]_\beta \quad [T(0,1,1)]_\beta)$, y por hipótesis $[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, esto nos permite plantear ecuaciones para obtener los datos que nos faltan.

$$\begin{aligned}
[T(1,2,-1)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff T(1,2,-1) = v_1 + v_2 + v_3 \iff v_1 + v_2 + v_3 = (1,0,2) \\
[T(1,1,-3)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff T(1,1,-3) = v_1 - v_2 + v_3 \iff v_1 - v_2 + v_3 = (-4,3,-6) \\
[T(0,1,1)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &\iff T(0,1,1) = v_1 + v_2 - v_3 \iff v_1 + v_2 - v_3 = (3,-2,5)
\end{aligned}$$

Luego tenemos el sistema, (porque son condiciones simultaneas que deben cumplirse).

$$\left.\begin{array}{lrcl}
(1) & v_1 + v_2 + v_3 & = & (1,0,2) \\
(2) & v_1 - v_2 + v_3 & = & (-4,3,-6) \\
(3) & v_1 + v_2 - v_3 & = & (3,-2,5)
\end{array}\right| \Longrightarrow \begin{cases} v_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) & : \text{Haciendo } (2)+(3) \\ v_2 = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 4\right) & : \text{Haciendo } (1)-(2) \\ v_3 = \left(-1, 1, -\frac{3}{2}\right) & : \text{Haciendo } (1)-(3) \end{cases}$$

Así que, obtenemos la base β, pedida.

$$\beta = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 4\right), \left(-1, 1, -\frac{3}{2}\right) \right\}$$

3.3 Determine, si es posible, $[T]_\beta^\beta$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar $[T]_\beta^\beta = ([T(v_1)]_\beta \quad [T(v_2)]_\beta \quad [T(v_3)]_\beta)$

Etapa 2. Ahora pasamos directamente a generar $[T]_\beta^\beta$

$$
\begin{aligned}
[T]_{\beta}^{\beta} &= \begin{pmatrix} [T(v_1)]_\beta & [T(v_2)]_\beta & [T(v_3)]_\beta \end{pmatrix} \\
&= \left(\left[T\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right]_\beta \quad \left[T\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2},4\right)\right]_\beta \quad \left[T\left(-1,1,-\frac{3}{2}\right)\right]_\beta \right)
\end{aligned}
$$

En general calculamos $([T(x,y,z)]_\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, es decir debemos resolver la ecuación:

$[(x+y+2z, x-y-z, x+2y+3z)]_\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, en consecuencia calculamos lo siguiente:

$$
(x+y+2z, x-y-z, x+2y+3z) = a\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) + b\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2},4\right) + c\left(-1,1,-\frac{3}{2}\right)
$$

Por tanto tenemos que resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{array}{cccccccc|}
(1) & \frac{-a}{2} & + & \frac{5b}{2} & - & c & = & x+y+2z \\
(2) & \frac{a}{2} & - & \frac{3b}{2} & + & c & = & x-y-z \\
(3) & -\frac{a}{2} & + & 4b & - & \frac{3c}{2} & = & x+2y+3z \\
\hline
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{cases}
b = 2x+z & : \text{Haciendo } (1)+(2) \\
c = 6x-2y+z & : \text{Haciendo } (2)+(3) \\
a = -4x+2y-z & \text{Sustituyendo en } (2)
\end{cases}
$$

Así que,

$$
(x+y+2z, x-y-z, x+2y+3z) = (-4x+2y-z)\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) + (2x+z)\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2},4\right) + (6x-2y+z)\left(-1,1,-\frac{3}{2}\right)
$$

Equivalentemente, y es de la forma que nos interesa, hemos obtenido la fórmula

$$
([T(x,y,z)]_\beta = \begin{pmatrix} (-4x+2y-z) \\ (2x+z) \\ (6x-2y+z) \end{pmatrix}
$$

La que nos permite decir que

$$
\begin{aligned}
[T]_{\beta}^{\beta} &= \left(\left[T\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right]_\beta \quad \left[T\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2},4\right)\right]_\beta \quad \left[T\left(-1,1,-\frac{3}{2}\right)\right]_\beta \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -17 & \frac{15}{2} \\ -\frac{3}{2} & 9 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{9}{2} & 22 & -\frac{19}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4. Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales tales que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = m$. Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{W})$, $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y $T(\alpha) = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\} \subset \mathbb{W}$. Demuestre que

$$
T(\alpha) \text{ linealmente independiente} \quad \Longrightarrow \quad n \le m
$$

Solución

Etapa 1. Alternativa 1. Conceptual:

$$\begin{aligned}
T(\alpha)=\{T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_n)\}\subset \mathbb{W} &\implies \langle T(\alpha)\rangle \leq \mathbb{W}\\
T(\alpha)\ \text{Linealmente independiente} &\implies \dim_{\mathbb{K}}\langle T(\alpha)\rangle = n\\
&\implies \dim_{\mathbb{K}}\langle T(\alpha)\rangle = n \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = m
\end{aligned}$$

Alternativa 2.

$$\begin{aligned}
u\in\ker(t) &\iff u\in\mathbb{V} \quad \wedge \quad T(u)=0_{\mathbb{W}}\\
&\implies u=\sum_{i=1}^n a_iv_i \quad \wedge \quad T\left(\sum_{i=1}^n a_iv_i\right)=0_{\mathbb{W}}; \quad (\alpha \text{ es base de } \mathbb{V})\\
&\implies u=\sum_{i=1}^n a_iv_i \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n a_iT(v_i)=0_{\mathbb{W}}; \quad (T\in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V},\mathbb{W}))\\
&\implies u=\sum_{i=1}^n a_iv_i \quad \wedge \quad a_i=0 \quad (\forall i; 1\leq i\leq n); \quad (T(\alpha)\ \text{Linealmente independiente})\\
&\implies u=\sum_{i=1}^n 0\cdot v_i = 0_{\mathbb{V}}\\
&\implies \ker(T)=\{0_{\mathbb{V}}\} \quad \text{Es decir, } T \text{ Inyectiva}
\end{aligned}$$

Para concluir por el teorema de la dimensión y recordando que Img $(T)\leq \mathbb{W}$

$$\begin{aligned}
n=\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) &= \dim_{\mathbb{K}}(\ker(T))+\dim_{\mathbb{K}}(\text{Img }(T))\\
&= 0+\dim_{\mathbb{K}}(\text{Img }(T))\\
&= \dim_{\mathbb{K}}(\text{Img }(T))\leq m
\end{aligned}$$