Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep N°3 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
8 de octubre del 2007

(1) Si $\mathbb{S} = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \mid (a_{ij}) = (-a_{ij})^t\}$ entonces demuestre que

(a) $A \in \mathbb{S} \Longrightarrow \det(A) = (-1)^n \det(A)$

Solución

Etapa 1. P.d.q. $A \in \mathbb{S} \Longrightarrow \det(A) = (-1)^n \det(A)$

Etapa 2. Gestión de la información.

$$A \in \mathbb{S} \Longleftrightarrow A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \ \wedge \ (a_{ij}) = (-a_{ij})^t \Longleftrightarrow A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \ \wedge \ (a_{ij}) = (-a_{ji})$$

entonces para $A = (a_{ij}) \in \mathbb{S}$ debemos tener que

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ -a_{12} & -a_{22} & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ -a_{12} & -a_{22} & \cdots & -a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^2\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} \cdots (-1)^n\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^n\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^t = (-1)^n\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que, $\det(A) = (-1)^n \det(A)$

(b) $A \in \mathbb{S} \wedge n$ impar $\Longrightarrow \det(A) = 0$

Solución

$$A \in \mathbb{S} \wedge n \text{ impar } \Longrightarrow \det(A) = (-1)\det(A) \Longrightarrow \det(A) = 0$$

(2) Si $A = \begin{pmatrix} (1+a) & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & (1+a^2) & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & (1+a^3) & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix}$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{X} \ = \ \{a \in \mathbb{C} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(4))\}$$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Solución

Etapa 1. Debemos determinar $\mathbb{X} = \{a \in \mathbb{C} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$

Etapa 2. Gestión de la información

$$\begin{aligned}
a \in \mathbb{X} &\iff a \in \mathbb{C} \ \wedge \ A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \iff a \in \mathbb{C} \ \wedge \ \det(A) = 0 \\
&\iff a \in \mathbb{C} \ \wedge \ \det \begin{pmatrix} (1+a) & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & (1+a^2) & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & (1+a^3) & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Ahora procedemos a calcular el $\det(A)$.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} (1+a) & a^2 & a^3 & a^4 \\ a & (1+a^2) & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & (1+a^3) & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ a & (1+a^2) & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & (1+a^3) & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+a+a^2) & a^3 & a^4 \\ a & a^2 & (1+a^3) & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+a+a^2) & a^3 & a^4 \\ 0 & a+a^2 & (1+a^3) & a^4 \\ a & a^2 & a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+a+a^2) & a^3 & a^4 \\ 0 & a+a^2 & (1+a^3) & a^4 \\ 0 & a+a^2 & a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} (1+a+a^2) & a^3 & a^4 \\ a+a^2 & (1+a^3) & a^4 \\ a+a^2 & a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a+a^2 & (1+a^3) & a^4 \\ a+a^2 & a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & (1+a+a^2+a^3) & a^4 \\ 0 & a+a^2+a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} (1+a+a^2+a^3) & a^4 \\ a+a^2+a^3 & (1+a^4) \end{pmatrix} \\
&= (1+a+a^2+a^3)(1+a^4) - a^4(a+a^2+a^3) \\
&= 1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7-a^5-a^6-a^7 \\
&= 1+a+a^2+a^3+a^4 \\
&= \frac{a^5-1}{a-1}
\end{aligned}$$

Luego,

$$a \in \mathbb{X} \iff a \in \mathbb{C} \ \wedge \frac{a^5-1}{a-1} = 0 \iff a \in \mathbb{C} \ \wedge a^5 = 1 \wedge a \neq 1 \iff \mathbb{X} = \left\{ a = \cos\frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{5} \mid k = 1,2,3,4 \right\}$$

(3) Si ω es una raíz cúbica de la unidad, (es decir $\omega^3 = 1$) tal que $\omega \neq 1$ entonces demuestre que

$$(1+\omega)\cdot(1+2\omega)\cdot(1+3\omega)\cdot(1+5\omega) - 21 \quad = \quad 0$$

Solución

Etapa 1. P.d.q. $(1+\omega)\cdot(1+2\omega)\cdot(1+3\omega)\cdot(1+5\omega) - 21 = 0$

Etapa 2. Gestión de la información

(a) Si ω es una raíz cúbica de la unidad y $\omega \neq 1$ entonces $1+\omega+\omega^2 = 0$

(b) Usando esta información y llamando $C = (1+\omega)\cdot(1+2\omega)\cdot(1+3\omega)\cdot(1+5\omega)$ procedemos a calcular lo pedido.

$$\begin{aligned}
C &= (1+\omega)\cdot(1+2\omega)\cdot(1+3\omega)\cdot(1+5\omega) \\
&= (-\omega^2)\cdot(\omega-\omega^2)\cdot(2\omega-\omega^2)\cdot(4\omega-\omega^2); \quad (\text{Pues, } 1+\omega=-\omega^2) \\
&= (-\omega^2)\cdot\omega(1-\omega)\cdot\omega\cdot(2-\omega)\cdot\omega\cdot(4-\omega) \\
&= (-\omega^2)(1-\omega)\cdot(2-\omega)\cdot(4-\omega)\cdot\omega^3 \\
&= (-\omega^2)(1-\omega)\cdot(2-\omega)\cdot(4-\omega); \qquad (\text{ Pues, } \omega^3=1) \\
&= (-\omega^2+\omega^3)\cdot(2-\omega)\cdot(4-\omega) \\
&= (1-\omega^2)\cdot(2-\omega)\cdot(4-\omega) \\
&= (2+\omega)\cdot(2-\omega)\cdot(4-\omega) \\
&= (4-\omega^2)\cdot(4-\omega) \\
&= (5+\omega)\cdot(4-\omega) \\
&= 20-5\omega+4\omega-\omega^2 \\
&= 20-\omega-\omega^2 \\
&= 20+1; \qquad\qquad (\text{Pues, } -\omega-\omega^2=1) \\
&= 21
\end{aligned}$$

(c) Finalmente, concluimos que $(1+\omega)\cdot(1+2\omega)\cdot(1+3\omega)\cdot(1+5\omega) - 21 = 0$

(4) Dado el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \lambda & (2\lambda-1) & (\lambda+2) \\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-3) \\ \lambda & (3\lambda-2) & (3\lambda+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+\lambda) \\ (2-\lambda) \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

Determine $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución única}\}$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene solución}\}$

Etapa 2. Gestión de la información.

De acuerdo al Teorema del Rango

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{S} &\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge (\star) \text{ tiene solución única} \\
&\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \rho(A|B) = \rho(A) = 3
\end{aligned}$$

Donde $\rho(A|B)$ y $\rho(A)$ son los rangos de $(A|B)$ la matriz ampliada asociada al sistema $(\star)$, y A la matriz de coeficientes asociada también a $(\star)$.

Así que debemos calcular dichos rangos.

$$
\begin{aligned}
A|B &= \begin{pmatrix} \lambda & (2\lambda-1) & (\lambda+2) & | & 1 \\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-3) & | & (1+\lambda) \\ \lambda & (3\lambda-2) & (3\lambda+1) & | & (2-\lambda) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \lambda & (2\lambda-1) & (\lambda+2) & | & 1 \\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-3) & | & (1+\lambda) \\ 0 & (\lambda-1) & (2\lambda-1) & | & (1-\lambda) \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} \lambda & (2\lambda-1) & (\lambda+2) & | & 1 \\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-3) & | & (1+\lambda) \\ 0 & 0 & (\lambda+2) & | & -2\lambda \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 5 & | & -\lambda \\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-3) & | & (1+\lambda) \\ 0 & 0 & (\lambda+2) & | & -2\lambda \end{pmatrix} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

• Si $\lambda = 0$ entonces de $(*)$ sigue que

$$
A|B \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & | & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}
$$

Conclusión $\rho(A|B) = \rho(A) = 2 < 3$. Así que $0 \notin \mathbb{S}$

• Si $\lambda \neq 0$ entonces de $(*)$ sigue que

$$
A|B \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{\lambda} & | & -17 \\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-3) & | & (1+\lambda) \\ 0 & 0 & (\lambda+2) & | & -2\lambda \end{pmatrix} \qquad (**)
$$

• Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda = 1$ entonces de $(**)$ sigue que

$$
\begin{aligned}
A|B &\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & | & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & | & -1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Conclusión $\rho(A|B) = 3$ y $\rho(A) = 2$. Así que $1 \notin \mathbb{S}$

• Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ entonces de $(**)$ sigue que

$$
A|B \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{\lambda} & | & -1 \\ 0 & 1 & \frac{(\lambda-3)}{(\lambda-1)} & | & \frac{(1+\lambda)}{(\lambda-1)} \\ 0 & 0 & (\lambda+2) & | & -2\lambda \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8\lambda-5-\lambda^2}{\lambda(\lambda-1)} & | & -\frac{2\lambda}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & \frac{(\lambda-3)}{(\lambda-1)} & | & \frac{(1+\lambda)}{(\lambda-1)} \\ 0 & 0 & (\lambda+2) & | & -2\lambda \end{pmatrix} \qquad (***)
$$

• Si $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ y $\lambda = -2$ entonces de $(***)$ sigue que

$$
A|B \approx \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\frac{25}{6} & | & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & | & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}
$$

Conclusión $\rho(A|B) = 3$ y $\rho(A) = 2$. Así que $-2 \notin \mathbb{S}$

• Si $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$ entonces de $(***)$ sigue que

$$
A|B \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8\lambda-5-\lambda^2}{\lambda(\lambda-1)} & | & -\frac{2\lambda}{\lambda-1} \\ 0 & 1 & \frac{(\lambda-3)}{(\lambda-1)} & | & \frac{(1+\lambda)}{(\lambda-1)} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-2\lambda}{(\lambda+2)} \end{pmatrix} \qquad (**)
$$

Conclusión $\rho(A|B) = 3$ y $\rho(A) = 3$. Así que

$$
\mathbb{S} = \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}
$$

Solución alternativa

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathbb{S} &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ (\star) \text{ tiene solución única}\\ &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \rho(A|B) = \rho(A) = 3\end{aligned}$$

Donde $\rho(A|B)$ y $\rho(A)$ son los rangos de $(A|B)$ la matriz ampliada asociada al sistema $(\star)$, y A la matriz de coeficientes asociada también a $(\star)$.

Además como $\rho(A) = 3 \iff A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)) \iff \det(A) \neq 0$ entonces debemos proceder a calcular $\det(A)$.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix} \lambda & (2\lambda-1) & (\lambda+2)\\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-3)\\ \lambda & (3\lambda-2) & (3\lambda+1)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda & (2\lambda-1) & (\lambda+2)\\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-3)\\ 0 & (\lambda-1) & (2\lambda-1)\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda & (2\lambda-1) & (\lambda+2)\\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-3)\\ 0 & 0 & (\lambda+2)\end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+2)\end{aligned}$$

Así para, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$ tenemos solución única del tipo

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & (2\lambda-1) & (\lambda+2)\\ 0 & (\lambda-1) & (\lambda-3)\\ \lambda & (3\lambda-2) & (3\lambda+1)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1\\ (1+\lambda)\\ (2-\lambda)\end{pmatrix}$$

De donde sigue que,

$$\mathbb{S} = \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$$