**Universidad de Santiago de Chile**
**Departamento de Matemática y C.C.**
**Ingeniería Civil Industrial**

**Solución Pep N° 2 de Álgebra**[1]
**Ingeniería Civil**
**Profesor Ricardo Santander Baeza**
**9 de julio del 2007**

(1) Sea $\mathbb{A}$ un conjunto no vacío y considere las funciones $h_1 : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}$, $h_2 : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}$ y $h_3 : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}$. Demuestre que

$$[(h_1 \circ h_2 = h_3 \circ h_2) \quad \wedge \quad h_2 \text{ sobreyectivo}] \quad \Longrightarrow \quad h_1 = h_3$$

Solución

Etapa 1. $h_1 = h_3$ si y sólo si $h_1(a) = h_3(a) \quad (\forall a; a \in \mathbb{A})$, por tanto debemos mostrar justamente eso.

Etapa 2. Gestión de la información

- Como $h_2$ es sobreyectiva entonces Img $(h_2) = \mathbb{A}$, así que para cada $a \in \mathbb{A}$ existe $b \in \mathbb{A}$ tal que $h_2(b) = a$
- Luego, procedemos a usar la igualdad $h_1 \circ h_2 = h_3 \circ h_2$, como sigue:

$$\begin{aligned} h_1(a) &= h_1(h_2(b)) \\ &= (h_1 \circ h_2)(b) \\ &= (h_3 \circ h_2)(b) \\ &= h_3(h_2)(b)) \\ &= h_3(a) \end{aligned}$$

Luego, $h_1 = h_3$

(2.a) Demuestre que

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 - \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$$

Solución

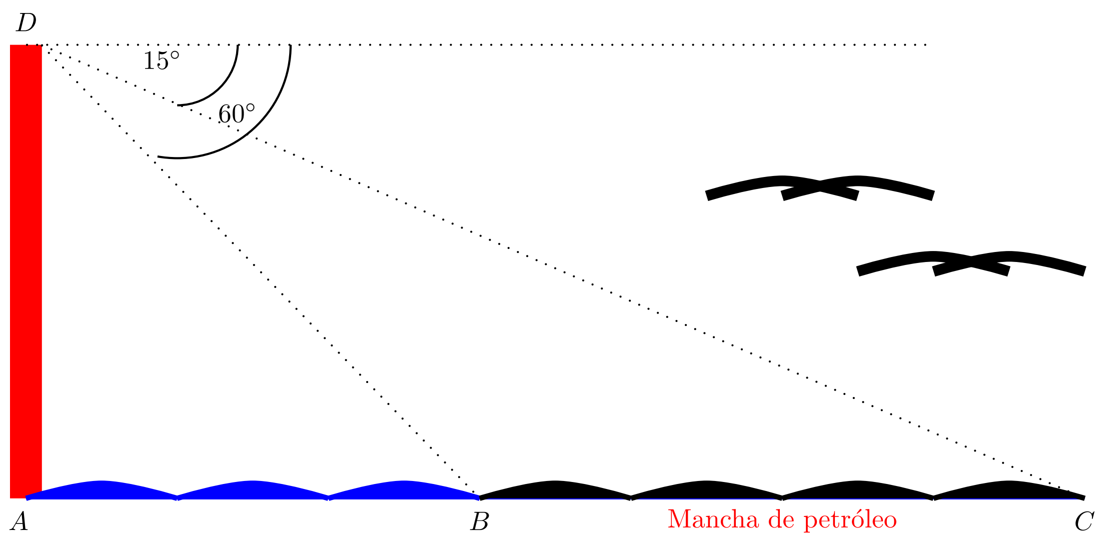
[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

$$\begin{aligned}
\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} &= \frac{1+\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}\left(\frac{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha}\right) = \frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)^2} \\
&= \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{1-2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha} \\
&= \frac{\cos 2\alpha}{1-\operatorname{sen}2\alpha}
\end{aligned}$$

(2.b) Desde un faro, que está a 50 metros sobre el nivel del mar, el ”Guardafaros” observa una preocupante estela de petróleo en la superficie del agua, bajo ángulos de depresión de 15° y de 60° respectivamente. Determine usted, si es posible, la longitud de la estela de petróleo.

Solución

Etapa 1. El problema se puede plantear como sigue:




Etapa 2. Gestión de la información

- En $\Delta$ rectángulo $BAD$ tenemos que

$$\operatorname{tg} 60 = \frac{50}{AB} \Longrightarrow AB = \frac{50}{\sqrt{3}}\ m \tag{1}$$

- En $\Delta$ rectángulo $CAD$ tenemos que

$$\operatorname{tg} 15 = \frac{50}{AC} \Longrightarrow AC = \frac{50}{\operatorname{tg} 15}\ m \tag{2}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 15 &= \frac{\operatorname{sen}(45-30)}{\cos(45-30)}\\
&= \frac{\operatorname{sen} 45 \cos 30 - \operatorname{sen} 30 \cos 45}{\cos 45 \cos 30 + \operatorname{sen} 45 \operatorname{sen} 30}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2) tenemos que

$$\begin{aligned}
AC = \frac{50(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\, m \quad &\Longrightarrow \quad AB + BC = \frac{50(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\, m\\
&\Longrightarrow \quad BC = \frac{50(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\, m - AB\\
&\Longrightarrow \quad BC = \frac{50(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\, m - \frac{50}{\sqrt{3}}\, m \quad \text{(Aplicando (1))}\\
&\Longrightarrow \quad BC = \frac{50(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}\, m - \frac{50\sqrt{3}}{3}\, m\\
&\Longrightarrow \quad BC = \left(\frac{50(8+2\sqrt{12})}{4} - \frac{50\sqrt{3}}{3}\right) m\\
&\Longrightarrow \quad BC = \left(\frac{50(8+4\sqrt{3})}{4} - \frac{50\sqrt{3}}{3}\right) m\\
&\Longrightarrow \quad BC = \left(50(2+\sqrt{3}) - \frac{50\sqrt{3}}{3}\right) m\\
&\Longrightarrow \quad BC = \left(100 + 50\sqrt{3} - \frac{50\sqrt{3}}{3}\right) m\\
&\Longrightarrow \quad BC = \frac{300 + 150\sqrt{3} - 50\sqrt{3}}{3}\, m\\
&\Longrightarrow \quad BC = \frac{300 + 100\sqrt{3}}{3}\, m\\
&\Longrightarrow \quad BC \approx 158\, m
\end{aligned}$$

(3) Dadas las parábolas $\mathbb{P}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x - 8 - y = 0\}$ y $\mathbb{P}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + x^2 - 2x - 8 = 0\}$. Determine, si es posible, la ecuación general de una circunferencia que pasa por los puntos de intersección de ambas parábolas, y por el centro de la cónica de ecuación general $4x^2 + \sqrt{2}\, y^2 - 24x - 10\sqrt{2}\, y + 36 + 21\sqrt{2} = 0$
Solución

Etapa 1. Debemos determinar la ecuación general de una circunferencia. Para ello contamos con que la ecuación canónica de una circunferencia es de la forma:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{3}$$

Etapa 2. Determinamos ahora los puntos por los cuales debe pasar (3)

(a) $u \in \mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 \Longleftrightarrow u \in \mathbb{P}_1 \wedge u \in \mathbb{P}_2$, es decir

$$\begin{aligned}
u \in \mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 &\Longleftrightarrow u = (x_0, y_0) \wedge (y_0 = x_0^2 - 2x_0 - 8 \wedge y_0 = -x_0^2 + 2x_0 + 8) \\
&\Longleftrightarrow u = (x_0, y_0) \wedge (x_0^2 - 2x_0 - 8 = -x_0^2 + 2x_0 + 8) \\
&\Longleftrightarrow u = (x_0, y_0) \wedge 2x_0^2 - 4x_0 - 16 = 0 \\
&\Longleftrightarrow u = (x_0, y_0) \wedge x_0^2 - 2x_0 - 8 = 0 \\
&\Longrightarrow u = (x_0, y_0) \wedge x_0 = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \\
&\Longrightarrow u = (x_0, y_0) \wedge x_0 = \frac{2 \pm 6}{2} \\
&\Longrightarrow u = (x_0, y_0) \wedge x_0 = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases} \\
&\Longrightarrow u = (-2, 0) \vee u = (4, 0)
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que $P = (-2, 0)$ y $Q = (4, 0)$ están en la circunferencia (3). Así que

$$\begin{aligned}
\sqrt{(-2-h)^2 + k^2} = \sqrt{(4-h)^2 + y^2} &\Longrightarrow (-2-h)^2 + k^2 = (4-h)^2 + k^2 \\
&\Longrightarrow 4 + 4h + h^2 + k^2 = 16 - 8h + h^2 + k^2 \\
&\Longrightarrow 4 + 4h = 16 - 8h \\
&\Longrightarrow 12h = 12 \\
&\Longrightarrow h = 1
\end{aligned}$$

Así que (3) nos queda como:

$$(x-1)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{4}$$

(b) Determinamos el centro de la sección cónica dada:

$$\begin{aligned}
4x^2 + \sqrt{2}\, y^2 - 24x - 10\sqrt{2}\, y + 36 + 21\sqrt{2} = 0 &\Longleftrightarrow 4(x^2 - 6x) + \sqrt{2}(y^2 - 10y) + 36 + 21\sqrt{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow 4(x^2 - 6x + 9 - 9) + \sqrt{2}(y^2 - 10y + 25 - 25) + 36 + 21\sqrt{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow 4(x-3)^2 - 36 + \sqrt{2}(y-5)^2 - 25\sqrt{2} + 36 + 21\sqrt{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow 4(x-3)^2 - 36 + \sqrt{2}(y-5)^2 - 25\sqrt{2} + 36 + 21\sqrt{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow 4(x-3)^2 + \sqrt{2}(y-5)^2 - 4\sqrt{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{(x-3)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1
\end{aligned}$$

Por tanto, una elipse y su centro es $P = (3, 5)$

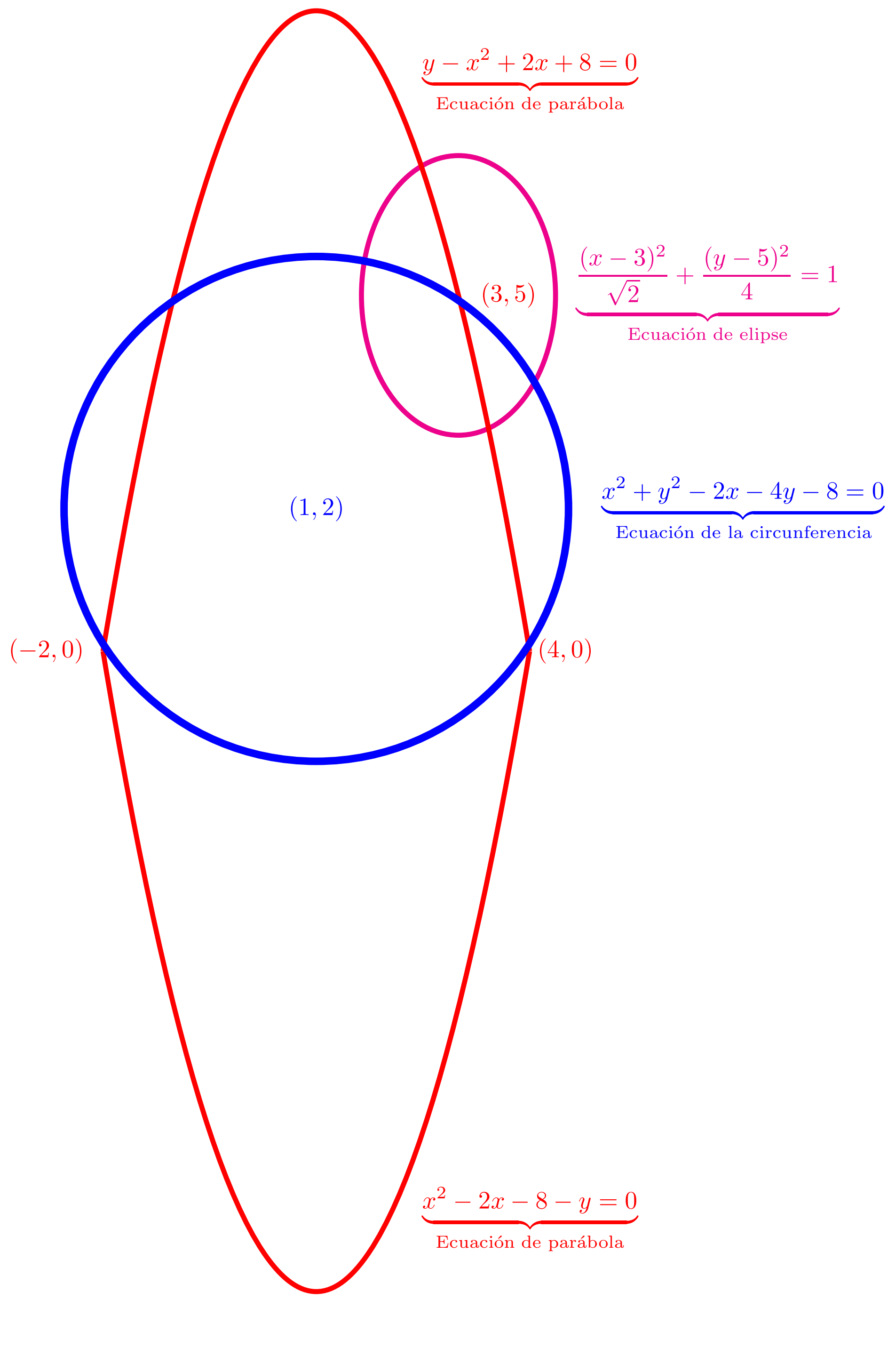
(c) Sustituyendo en (4), por ejemplo los punto $(3, 5)$ y $(4, 0)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(3-1)^2 + (5-k)^2 = (4-1)^2 + k^2 &\Longleftrightarrow 4 + (5-k)^2 = 9 + k^2 \\
&\Longleftrightarrow 4 + 25 - 10k + k^2 = 9 + k^2 \\
&\Longleftrightarrow 4 + 25 - 10k = 9 \\
&\Longleftrightarrow k = 2
\end{aligned}$$

Finalmente, $(h, k) = (1, 2)$, $r = 13$, y nuevamente sustituyendo en (4) tenemos el resultado deseado. Es decir

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-2)^2 &= 13\\ x^2-2x+1+y^2-4y+4 &= 13\\ x^2+y^2-2x-4y-8 &= 0\end{aligned}$$

(d) La situación gráfica no es pedida, sin embargo, la incluyo para su análisis:



(4) Si se define la función $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}_3[x]$como sigue:

$$T : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}+a_{22}) + (a_{11}-a_{22})\,x + (1+\lambda)(a_{12}+a_{21})\,x^2 + \lambda(a_{12}-a_{21})x^3$$

(a) Demuestre que $T$ es un homomorfismo $(\forall\lambda, \lambda \in \mathbb{R})$

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que para $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces $T(A+B) = T(A) + T(B)$

Etapa 2. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces

$$\begin{aligned} T(A+B) &= T\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}) + (a_{11}+b_{11}-a_{22}-b_{22})\,x + (1+\lambda)\,(a_{12}+b_{12}+a_{21}+b_{21})x^2 + \\ &\quad \lambda(a_{12}+b_{12}-a_{21}-b_{21})x^3 \\ &= (a_{11}+a_{22}+b_{11}+b_{22}) + (a_{11}-a_{22}+b_{11}-b_{22})\,x + (1+\lambda)(a_{12}+a_{21}+b_{12}+b_{21})x^2 + \\ &\quad \lambda(a_{12}-a_{21}+b_{12}-b_{21})x^3 \\ &= (a_{11}+a_{22}) + (a_{11}-a_{22})\,x + (1+\lambda)(a_{12}+a_{21})x^2 + \lambda(a_{12}-a_{21})x^3 + \\ &\quad (b_{11}+b_{22}) + (b_{11}-b_{22})\,x + (1+\lambda)(b_{12}+b_{21})x^2 + \lambda(b_{12}-b_{21})x^3 \\ &= T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, $T$ es un homomorfismo de grupos $(\forall\lambda; \lambda \in \mathbb{R})$

(b) Determine el conjunto, $I = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ es un isomorfismo}\}$
Solución

Etapa 1. Como $T$ es un homomorfismo de grupos $(\forall\lambda; \lambda \in \mathbb{R})$ entonces las restricciones para $\lambda$, deben provenir de su biyectividad.

Etapa 2. En esa dirección tenemos que:
(i) $T$ inyectivo si y sólo si $\ker(T) = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$. Es decir podemos estudiar el núcleo de $T$.

$$\begin{aligned} A \in \ker(T) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge T(A) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge (a_{11}+a_{22}) + (a_{11}-a_{22})\,x + (1+\lambda)(a_{12}+a_{21})x^2 + \\ &\quad \lambda(a_{12}-a_{21})x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{lcl} a_{11}+a_{22} & = & 0 \\ a_{11}-a_{22} & = & 0 \\ (1+\lambda)(a_{12}+a_{21}) & = & 0 \\ \lambda(a_{12}-a_{21}) & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{l} a_{11} = a_{22} = 0 \\ (1+\lambda) = 0 \vee (a_{12}+a_{21}) = 0 \\ \lambda = 0 \vee (a_{12}+a_{21}) = 0 \end{array} \end{aligned}$$

Luego, $\ker(T) = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$ si y sólo si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\forall A; A \in \ker(T))$ si y sólo si $(1+\lambda) \neq 0$ y $\lambda \neq 0$. Por tanto $T$ inyectivo si sólo si $\{-1, 0\} \subset I$

(ii) Finalmente, $T$ sobreyectivo si y sólo si $\text{Img}(T) = \mathbb{R}_3[x]$. Pero sabemos que por definición de función, para que $T$ sea sobreyectiva basta que tenga solución en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, la ecuación $T(A) = p(x)$, para cada polinomio en $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$. Es decir para $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$

$$T(A) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lcl|} a_{11} + a_{22} & = & b_0 \\ a_{11} - a_{22} & = & b_1 \\ (1+\lambda)(a_{12} + a_{21}) & = & b_2 \\ \lambda(a_{12} - a_{21}) & = & b_3 \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} a_{11} = \dfrac{b_0 + b_1}{2};\ a_{22} = \dfrac{b_0 - b_1}{2} \\ \\ (a_{12} + a_{21}) = \dfrac{b_2}{(1+\lambda)} \quad ((1+\lambda) \neq 0) \\ \\ (a_{12} - a_{21}) = \dfrac{b_3}{\lambda} \quad (\lambda \neq 0) \end{cases}$$

En resumen, $T$ será sobreyectiva si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$. Así que

$$I \quad = \quad \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$