

(1) Sean p , q y r proposiciones lógicas y considere la nueva proposición lógica.

$$[(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)] \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)] \quad (*)$$

1.1 Pruebe usando una tabla de verdad que la proposición (*) es una Tautología.

Solución

p	q	r	$p \vee q$	\Leftrightarrow	$p \wedge r$	\Rightarrow	$q \Rightarrow p$	\wedge	$p \Rightarrow r$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1

Luego (*) es una **Tautología**.

1.2 Pruebe usando propiedades, (y no tabla de verdad) que (*) es una Tautología.

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que (*) es una Tautología usando sólo propiedades. Es decir, si concordamos en hacer $A = [(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)]$ y $B = [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$ entonces debemos mostrar que

$$A \Rightarrow B \quad (**)$$

Etapa 2. Gestión de la información.

- (a) Como (**) es una implicación, la única forma de ser falsa es que A sea verdadera y B sea Falsa, esto por definición del conectivo implicación.
- (b) Ahora como B es una conjunción entonces ella es falsa si $(q \Rightarrow p)$ es falsa ó $(p \Rightarrow r)$ es falsa
- (c) Es interesante observar aquí que p aparece en ambas implicaciones que originan a B , como consecuente y com antecedente respectivamente, así que estudiemos las posibilidades de p .
- (d) Si p es verdadero entonces

¹Cada problema vale 1.5 puntos.
 Tiempo 120'

(i) $(q \implies p)$ es verdadero, una vez más, por definición de implicación.

(ii) Como B es falsa entonces por lo dicho antes $(p \implies r)$ es falsa, y entonces de nuevo por definición de implicación r es falsa

(iii) Luego tenemos que p es verdadera y r es falsa, pero entonces ahora analizando A , observamos que:

◦ p verdadera hace que $(p \vee q)$ sea verdadera por definición de suma lógica o disyunción.

◦ r falsa hace que $(p \wedge r)$ sea falsa por definición de producto lógico o conjunción.

◦ Así que juntando la información hace que $A = [(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)]$ sea falsa lo que es una contradicción.

(e) Si p es falso entonces

(i) $(p \implies r)$ es verdadero, una vez más, por definición de implicación.

(ii) Como B es falsa entonces por lo dicho antes $(q \implies p)$ es falsa, y entonces de nuevo por definición de implicación q es verdadera

(iii) Luego tenemos que p es falsa y q es verdadera, pero entonces ahora analizando A , observamos que:

◦ p falsa hace que $(p \wedge r)$ sea falsa por definición de producto lógico o conjunción.

◦ q verdadera hace que $(p \vee q)$ sea verdadera por definición de suma lógica o disyunción.

◦ Así que juntando la información hace que $A = [(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)]$ sea falsa lo que nuevamente es una contradicción.

(f) conclusión B no puede ser falsa y entonces $(*)$ es verdadera.

(2) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula proposicional

$$F(n) : \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2} + 7^n; \text{ es divisible por } 7 \text{ es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

Solución

Etapa 1. Demostremos que $F(1)$ es verdadera.

$$\begin{aligned} 3^{2 \cdot 1 + 1} + 2^{1+2} + 7^1 &= 3^3 + 2^3 + 7^1 \\ &= 27 + 8 + 7 \\ &= 42 \\ &= 7 \cdot 6 \end{aligned}$$

Luego, $7|42$, e.e 7 divide a 42, y $F(1)$ es verdadera.

Etapa 2. Como Hipótesis de Inducción supondremos que $F(n)$ es verdadera. e.e. suponemos que existe k tal que

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} + 7^n = 7 \cdot k \quad (H)$$

Etapa 3. La Tesis de Inducción es que $F(n+1)$ es verdadera. e.e. debemos mostrar que existe h tal que

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} + 7^{n+1} = 7 \cdot h \iff 3^{2n+3} + 2^{n+3} + 7^{n+1} = 7 \cdot h$$

En efecto

$$\begin{array}{r} 3^{2n+3} + 2^{n+3} + 7^{n+1} \\ 3^{2n+3} + 9 \cdot 2^{n+2} + 9 \cdot 7^n \\ \hline -7 \cdot 2^{n+2} - 2 \cdot 7^n \end{array} : \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2} + 7^n = 9$$

Así que, por definición tenemos que

$$\begin{aligned} 3^{2n+3} + 2^{n+3} + 7^{n+1} &= 9(3^{2n+1} + 2^{n+2} + 7^n) + (-7 \cdot 2^{n+2} - 2 \cdot 7^n) \\ &\stackrel{(H)}{=} 9 \cdot 7k - 7(2^{n+2} + 2 \cdot 7^{n-1}) \\ &= 7 \underbrace{(9 \cdot k - 2^{n+2} - 2 \cdot 7^{n-1})}_h \end{aligned}$$

Luego, $F(n+1)$ es verdadera, y $F(k)$ es verdadera ($\forall k; k \in \mathbb{N}$)

- (3) Si llamamos c_k al coeficiente del k -ésimo término t_k , para cada k en el desarrollo binomial $(1+x)^n$ y $A = \{c_2, c_3, c_4\}$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{n \in \mathbb{N} \mid A \text{ es una progresión aritmética}\}$$

Solución

Etap 1. Debemos determinar los elementos del conjunto \mathbb{S} . Es decir

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{S} &\iff n \in \mathbb{N} \wedge A = \{c_2, c_3, c_4\} \text{ es una progresión aritmética} \\ &\iff n \in \mathbb{N} \wedge c_3 - c_2 = c_4 - c_3 \quad (\text{De estas relaciones depende la solución del problema}) \end{aligned}$$

Etap 2. Gestión de la información

- Sabemos que c_{k+1} es el coeficiente del término t_{k+1} . Así que en primer lugar procedemos a determinar los términos involucrados; t_2, t_3 y t_4

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \binom{n}{k} x^k \implies c_{k+1} = \binom{n}{k} \implies \begin{cases} c_2 = \binom{n}{1} \\ c_3 = \binom{n}{2} \\ c_4 = \binom{n}{3} \end{cases}$$

- Sabemos también que $A = \{c_2, c_3, c_4\}$ es una progresión aritmética si y sólo si $c_3 - c_2 = c_4 - c_3$. Así que

$$\begin{aligned}
c_3 - c_2 = c_4 - c_3 &\iff \binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2} \\
&\iff \frac{n!}{2!(n-2)!} - \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} \\
&\iff \frac{(n-2)!(n-1)n}{2!(n-2)!} - \frac{(n-1)!n}{1!(n-1)!} = \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{3!(n-3)!} - \frac{(n-2)!(n-1)n}{2!(n-2)!} \\
&\iff \frac{(n-1)n}{2} - \frac{n}{1} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6} - \frac{(n-1)n}{2} \\
&\iff \frac{(n-1)n - 2n}{2} = \frac{(n-2)(n-1)n - 3n(n-1)}{6} \\
&\iff \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n(n-1)(n-5)}{6} \\
&\iff 3(n-3) = (n-1)(n-5) \\
&\iff 3n - 9 = n^2 - 6n + 5 \\
&\iff n^2 - 9n + 14 = 0
\end{aligned}$$

- Finalmente,

$$n^2 - 9n + 14 = 0 \implies (n-2)(n-7) = 0 \implies n = 2 \wedge n = 7$$

Etapla 3. Conclusiones y toma de decisiones:

- Si $n = 2$ entonces tenemos que $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{2}{2} = 1$ y $\binom{2}{3} = \text{No definido}$, por tanto $2 \notin \mathbb{S}$
- Si $n = 7$ entonces tenemos que $\binom{7}{1} = 7$, $\binom{7}{2} = 21$ y $\binom{7}{3} = 35$ forman una progresión aritmética con diferencia 14.

Luego, $\mathbb{S} = \{7\}$

(4) Sea $\mathbb{U} = \{r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid 3a_0 - 2a_1 = a_2\}$. Define en $\mathbb{R}_2[x]$ la relación

$$p(x) \mathfrak{R} q(x) \iff (q(x) - p(x)) \in \mathbb{U} \quad (\text{para cada: } p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \text{ y } q(x) \in \mathbb{R}_2[x])$$

4.1 Demuestre que \mathfrak{R} es una relación de equivalencia.

Solución

- (a) Debemos mostrar que \mathfrak{R} es una relación reflexiva, y para ello observamos lo siguiente.

Si $r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces

$$r(x) - r(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2) - (a_0 + a_1x + a_2x^2) = \underbrace{0}_{a_0} + \underbrace{0}_{a_1} \cdot x + \underbrace{0}_{a_2} \cdot x^2$$

Además $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$, así que $(r(x) - r(x)) \in \mathbb{U}$ y $r(x) \mathfrak{R} r(x)$, y por ende es una relación reflexiva.

- (b) Debemos mostrar que \mathfrak{R} es una relación simétrica, y para ello esta vez procedemos como sigue:

Si $r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $s(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $r(x)\Re s(x)$ entonces

$$\begin{aligned}
r(x)\Re s(x) &\iff (s(x) - r(x)) \in \mathbb{U} \\
&\iff [(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)x^2] \in \mathbb{U} \\
&\iff 3(b_0 - a_0) - 2(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2) \\
&\implies -3(b_0 - a_0) + 2(b_1 - a_1) = -(b_2 - a_2) \\
&\implies 3(a_0 - b_0) - 2(a_1 - b_1) = (a_2 - b_2) \\
&\implies [(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2] \in \mathbb{U} \\
&\implies (r(x) - s(x)) \in \mathbb{U} \\
&\implies s(x)\Re r(x)
\end{aligned}$$

Y \Re es una relación simétrica.

(c) Debemos mostrar que \Re es una relación transitiva, y para ello seguimos la siguiente rutina:

Si $r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, $s(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $t(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $r(x)\Re s(x) \wedge s(x)\Re t(x)$ entonces

$$\begin{aligned}
r(x)\Re s(x) &\iff (s(x) - r(x)) \in \mathbb{U} \\
&\iff [(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)x^2] \in \mathbb{U} \\
&\iff 3(b_0 - a_0) - 2(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2) \\
&\iff 3b_0 - 3a_0 - 2b_1 + 2a_1 = b_2 - a_2 \quad (1)
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
s(x)\Re t(x) &\iff (t(x) - s(x)) \in \mathbb{U} \\
&\iff [(c_0 - b_0) + (c_1 - b_1)x + (c_2 - b_2)x^2] \in \mathbb{U} \\
&\iff 3(c_0 - b_0) - 2(c_1 - b_1) = (c_2 - b_2) \\
&\iff 3c_0 - 3b_0 - 2c_1 + 2b_1 = c_2 - b_2 \quad (2)
\end{aligned}$$

Haciendo (1) + (2) tenemos que

$$\begin{aligned}
3b_0 - 3a_0 - 2b_1 + 2a_1 + 3c_0 - 3b_0 - 2c_1 + 2b_1 = b_2 - a_2 + c_2 - b_2 &\implies -3a_0 + 2a_1 + 3c_0 - 2c_1 = -a_2 + c_2 \\
&\implies 3(c_0 - a_0) - 2(c_1 - a_1) = c_2 - a_2 \\
&\implies (t(x) - r(x)) \in \mathbb{U} \\
&\implies r(x)\Re t(x)
\end{aligned}$$

Y entonces \Re es una relación transitiva, conforme a lo anterior es una relación de equivalencia.

4.2 Demuestre que $\overline{a + ax + ax^2} = \mathbb{U} \quad (\forall a; a \in \mathbb{R})$

Solución

En general, podemos calcular para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $\overline{p(x)} = \overline{a_0 + a_1x + a_2x^2}$.

$$\begin{aligned}
q(x) \in \overline{p(x)} &\iff q(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge q(x) \Re p(x) \\
&\iff q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge [(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2] \in \mathbb{U} \\
&\iff q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge 3(a_0 - b_0) - 2(a_1 - b_1) = (a_2 - b_2) \\
&\iff q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge 3b_0 - 2b_1 - b_2 = 3a_0 - 2a_1 - a_2 \\
&\iff q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge 3b_0 - 2b_1 - (3a_0 - 2a_1 - a_2) = b_2 \\
&\iff q(x) = b_0 + b_1x + [3b_0 - 2b_1 - (3a_0 - 2a_1 - a_2)]x^2 \mid b_0 \in \mathbb{R} \wedge b_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Así que,

$$\overline{a_0 + a_1x + a_2x^2} = \{b_0 + b_1x + [3b_0 - 2b_1 - (3a_0 - 2a_1 - a_2)]x^2 \mid b_0 \in \mathbb{R} \wedge b_1 \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto, en particular para $\overline{a + ax + ax^2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{a + ax + ax^2} &= \{b_0 + b_1x + [3b_0 - 2b_1 - (3a - 2a - a)]x^2 \mid b_0 \in \mathbb{R} \wedge b_1 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{b_0 + b_1x + [3b_0 - 2b_1]x^2 \mid b_0 \in \mathbb{R} \wedge b_1 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Y por otra parte,

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \{r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid 3a_0 - 2a_1 = a_2\} \\
&= \{r(x) = a_0 + a_1x + (3a_0 - 2a_1)x^2 \mid a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Luego, $\overline{a + ax + ax^2} = \mathbb{U} \quad (\forall a; a \in \mathbb{R})$