Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución de la Prueba Acumulativa Semestral de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
13 de Agosto del 2007

(1) Si $A = \{3, u_2, u_3, 12, u_5, \cdots\}$ es una Progresión Aritmética entonces demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_k = 3n \cdot 2^{n-1}$$

Solución

Etapa 1. P.d.q. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_k = 3n \cdot 2^{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$

Etapa 2. Gestión de la información

(a) A es una progresión aritmética si y sólo si para cada $k \in \mathbb{N}$, $u_k = a_1 + (k-1)d$
- $u_1 = 3 \Longrightarrow u_k = 3 + (k-1)d$
- $u_4 = 12 \Longrightarrow 12 = 3 + 3d \Longrightarrow d = 3 \Longrightarrow u_k = 3k$

(b) Sustituyendo el resultado anterior tenemos que,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3k = 3\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \qquad (*)$$

(c) Ahora aplicando las definiciones adecuadas tenemos que:

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{(n-k)!k!} = k\,\frac{n(n-1)!}{(n-k)!k(k-1)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1} \qquad (**)$$

(d) Sustituyendo $(**)$ en $(*)$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_k = 3n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \qquad (***)$$

(e) Pero como

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_k = 3\,n \cdot 2^{n-1}$$

(2) Sea $h : \mathbb{R}_3[x] \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $h(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_3 - a_1 & a_0 + \lambda a_3 \\ (2\lambda - 1)(a_2 + a_3) & (\lambda + 3)a_2 \end{pmatrix}$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

(a) Demuestre que h es un homomorfismo de grupos $(\forall \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$

Solución

Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, debemos mostrar que

$$h(p(x) + q(x)) = h(p(x)) + h(q(x))$$

$$\begin{aligned}
h(p(x)+q(x)) &= h(a_0+b_0+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3) \\
&= \begin{pmatrix} (a_3+b_3)-(a_1+b_1) & (a_0+b_0)+\lambda(a_3+b_3) \\ (2\lambda-1)((a_2+b_2)+(a_3+b_3)) & (\lambda+3)(a_2+b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_3-a_1) & (a_0+\lambda a_3) \\ (2\lambda-1)((a_2+a_3) & (\lambda+3)a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_3-b_1) & (b_0+\lambda b_3) \\ (2\lambda-1)((b_2+b_3) & (\lambda+3)b_2 \end{pmatrix} \\
&= h(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)+h(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3) \\
&= h(p(x))+h(q(x))
\end{aligned}$$

Luego, h es un homomorfismo para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Determine el conjunto $\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ no es un isomorfismo}\}$

Solución

- Sabemos que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ h es un homomorfismo.
- h será un isomorfismo si y sólo si h es una función biyectiva.
- Así que para h no ser un Isomorfismo basta que no sea inyectiva o sobreyectiva.
- Como la inyectividad está determinada por el $\ker(h)$ y la sobreyectividad por la Img (h).
- Partiremos estudiando el $\ker(h)$.

$$\begin{aligned}
p(x) \in \ker(h) &\iff p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \wedge h(p(x)) = 0_{\mathbb{M}_\mathbb{R}(2)} \\
&\iff p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \wedge h(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \wedge \begin{pmatrix} a_3-a_1 & a_0+\lambda a_3 \\ (2\lambda-1)(a_2+a_3) & (\lambda+3)a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \wedge \left.\begin{array}{lcl} a_3-a_1 &=& 0 \\ a_0+\lambda a_3 &=& 0 \\ (2\lambda-1)(a_2+a_3) &=& 0 \\ (\lambda+3)a_2 &=& 0 \end{array}\right| \qquad (*)
\end{aligned}$$

Estudiemos el sistema obtenido en $(*)$

Caso 1. $(2\lambda - 1) = 0$ entonces $(*)$ se transforma en

$$\left.\begin{array}{lcl} a_3-a_1 &=& 0 \\ a_0+\frac{1}{2}a_3 &=& 0 \\ (\frac{1}{2}+3)a_2 &=& 0 \end{array}\right| \wedge \left(a_2 = 0 \wedge a_1 = a_3 \wedge a_0 = -\frac{1}{2}a_3\right)$$

Así que $p(x) = -\frac{1}{2}a_3 + a_3x + 0 \cdot x^2 + a_3x^3 \in \ker(h)$, para cada $a_3 \in \mathbb{R}$. Por tanto $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{S}$, pues

$$\ker(h) = \{p(x) = -\frac{1}{2}a_3 + a_3x + 0 \cdot x^2 + a_3x^3; \mid a_3 \in \mathbb{R}\} \neq \left\{0 + 0x + 0x^2 + 0x^3\right\}$$

Caso 2. $(2\lambda - 1) \neq 0$ entonces $(*)$ se transforma en

$$\left.\begin{array}{lcl} a_3-a_1 &=& 0 \\ a_0+\lambda a_3 &=& 0 \\ a_2+a_3 &=& 0 \\ (\lambda+3)a_2 &=& 0 \end{array}\right| \qquad (**)$$

Caso 2.1 $(2\lambda - 1) \neq 0 \wedge (\lambda + 3) = 0$ entonces $(**)$ se transforma en

$$\left.\begin{array}{lcl} a_3 - a_1 & = & 0 \\ a_0 - 3a_3 & = & 0 \\ a_2 + a_3 & = & 0 \end{array}\right| \wedge (a_1 = a_3 \wedge a_0 = 3a_3 \wedge a_2 = -a_3)$$

Así que $p(x) = 3a_3 + a_3x - a_3 \cdot x^2 + a_3x^3 \in \ker(h)$, para cada $a_3 \in \mathbb{R}$. Por tanto $\lambda = -3 \in \mathbb{S}$, pues

$$\ker(h) = \{p(x) = 3a_3 + a_3x - a_3 \cdot x^2 + a_3x^3; \mid a_3 \in \mathbb{R}\} \neq \left\{0 + 0x + 0x^2 + 0x^3\right\}$$

Caso 2.2 $(2\lambda - 1) \neq 0 \wedge (\lambda + 3) \neq 0$ entonces $(**)$ se transforma en

$$\left.\begin{array}{lcl} a_3 - a_1 & = & 0 \\ a_0 + \lambda a_3 & = & 0 \\ a_2 + a_3 & = & 0 \\ a_2 & = & 0 \end{array}\right| \wedge (a_2 = 0 \wedge a_3 = 0 \wedge a_0 = 0 \wedge a_1 = 0)$$

Así que $p(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \in \ker(h)$. Por tanto $\lambda \neq -3 \notin \mathbb{S}$

Conclusión: $\mathbb{S} = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$

(3) Dado el homomorfismo $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - d, a + d)$. Si definimos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ la relación

$$A\Re B \iff (A - B) \in \ker(h)$$

(a) Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

Solución

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces $h(A - A) = h\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0)$. Así que $A\Re A$ y $\Re$ es una relación reflexiva.
- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces

$$\begin{array}{rcl}
A\Re B & \iff & h(A - B) = (0, 0) \iff h\begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} = (0, 0) \\
& \iff & ((a_{11} - b_{11}) - (a_{22} - b_{22}), (a_{11} - b_{11}) + (a_{22} - b_{22})) = (0, 0) \\
& \iff & \left.\begin{array}{lcl} (a_{11} - b_{11}) - (a_{22} - b_{22}) & = & 0 \\ (a_{11} - b_{11}) + (a_{22} - b_{22}) & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} -[(a_{11} - b_{11}) - (a_{22} - b_{22})] & = & 0 \\ -[(a_{11} - b_{11}) + (a_{22} - b_{22})] & = & 0 \end{array}\right| \\
& \Longrightarrow & \left.\begin{array}{lcl} (b_{11} - a_{11}) - (b_{22} - a_{22}) & = & 0 \\ (b_{11} - a_{11}) + (b_{22} - a_{22}) & = & 0 \end{array}\right| \iff h\begin{pmatrix} b_{11} - a_{11} & b_{12} - a_{12} \\ b_{21} - a_{21} & b_{22} - a_{22} \end{pmatrix} = (0, 0) \\
& \Longrightarrow & h(B - A) = (0, 0) \\
& \Longrightarrow & B\Re A
\end{array}$$

Así que $\Re$ es una relación simétrica.

- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces

$$\begin{array}{rcl}
A\Re B \wedge B\Re C & \iff & h(A - B) = (0, 0) \wedge h(B - C) = (0, 0) \\
& \Longrightarrow & (0, 0) = h(A - B) + h(B - C) = h(A - B + B - C) = h(A - C) \quad \text{(h es homomorfismo)} \\
& \Longrightarrow & A\Re C
\end{array}$$

Luego, $\Re$ es una relación transitiva, y con lo anterior es una relación de equivalencia.

(b) Demuestre que $\overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \ker(h)$

Solución

$$
\begin{aligned}
A \in \ker(h) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h(A) = 0_{\mathbb{R}^2}\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (0,0)\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h\begin{pmatrix} a_{11}-0 & a_{12}-0 \\ a_{21}-0 & a_{22}-0 \end{pmatrix} = (0,0)\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h(A-(0)) = (0,0)\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A\Re(0)\\
&\iff A \in \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $\ker(h) = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

(4) Considere la circunferencia C y la linea recta L, definidas por:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0\} \wedge L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid by - (b-1)x - b(b+1) = 0;\ b \in \mathbb{R}\}$$

(a) Determine centro y radio de la circunferencia

Solución

- Completamos cuadrados para determinar la ecuación canónica de la circunferencia

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0 &\iff x^2 - 6x + y^2 - 2y - 15 = 0\\
&\iff x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 15 = 0\\
&\iff (x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 - 15 = 0\\
&\iff (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25
\end{aligned}
$$

- Luego,el centro es $C = (3,1)$ y el radio es $r = 5$

(b) Determine $\mathbb{S} = \{b \in \mathbb{R} \mid \text{L sea tangente a } C \text{ en el punto } P = (0,5)\}$

Solución

- $P = (0,5) \in C$ pues $(0-3)^2 + (5-1)^2 = 25$

- $P = (0,5) \in L \iff 5b - b(b+1) = 0 \iff 4b - b^2 = 0 \Longrightarrow b = 0 \vee b = 4$

- Ahora la recta que pasa por el centro $C = (3,1)$ y el punto $P = (0,5)$ tiene pendiente $m = -\dfrac{4}{3}$, y esta recta debe ser perpendicular L, por tanto el producto de sus pendientes debe ser -1, es decir

$$-\frac{4}{3} \cdot \frac{b-1}{b} = -1 \quad (b \neq 0) \Longrightarrow b = 4$$

Finalmente, $\mathbb{S} = \{4\}$