Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Solución Segundo Examen de Álgebra[1]
06 de Marzo de 2008
Profesor Ricardo Santander Baeza

(1) Considere el sistema lineal $AX = B$ de orden 2, es decir $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, $X = (x_i) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1)$ y $B = (b_i) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2 \times 1)$. Demuestre que

$$AX = B \text{ tiene infinitas soluciones} \Longrightarrow \det(A) = 0$$

Solución

Si el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, tiene infinitas soluciones entonces de nuestro teorema del rango tenemos dos informaciones:

(a) $\rho(A) = \rho(A|B)$, porque sabemos que el sistema tiene solución

(b) $\rho(A) = \rho(A|B) < 2$, porque hay infinitas soluciones, y el orden de A es 2

(c) Luego A tiene al menos una fila nula y por tanto $\det(A) = 0$

(2) Si $W = \{(x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0 \ \wedge \ 2t + z = 0\}$ entonces usando el producto interno usual.

(a) Determine P_W

Solución

(i) Determinemos inicialmente una base ortogonal de W

$$\begin{aligned} u \in W &\iff u = (x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ x - y = 0 \wedge 2t + z = 0 \\ &\iff u = (x, y, t, z) \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ x = y \wedge z = -2t \\ &\iff u = (x, x, t, -2t), \quad (x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}) \\ &\iff u = x(1, 1, 0, 0) + t(0, 0, 1, -2), \quad (x \in \mathbb{R} \wedge t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Así que

$$W = \langle\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -2)\}\rangle$$

Y $\alpha = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -2)\}$ es una base ortogonal con el producto canónico

(ii) Así que aplicando la definición de la proyección tenemos que:

[1]Cada problema vale 1,5 puntos
Tiempo 120 '

$$
\begin{aligned}
P_W(x,y,t,z) &= \frac{\langle (x,y,t,z),(1,1,0,0)\rangle}{\langle (1,1,0,0),(1,1,0,0)\rangle}(1,1,0,0)+\frac{\langle (x,y,t,z),(0,0,1,-2)\rangle}{\langle (0,0,1,-2),(0,0,1,-2)\rangle}(0,0,1,-2)\\
&= \frac{x+y}{2}\,(1,1,0,0)+\frac{t-2z}{5}\,(0,0,1,-2)\\
&= \left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2},\frac{t-2z}{5},\frac{4z-2t}{5}\right)
\end{aligned}
$$

(iii) Finalmente comprobamos para tener certeza de nuestro bien proceder:

$$
\begin{aligned}
P_W(1,1,0,0) &= \left(\frac{2}{2},\frac{2}{2},\frac{0}{5},\frac{0}{5}\right)=(1,1,0,0)\quad \text{ok}\\
P_W(0,0,1,-2) &= \left(\frac{0}{2},\frac{0}{2},\frac{5}{5},\frac{-10}{5}\right)=(0,0,1,-2)\quad \text{ok}
\end{aligned}
$$

(b) Calcule $d((2,2,3,-6),W)$

Solución

Como $2-2=0$ y $2\cdot 3-6=0$ entonces $(2,2,3,-6)\in W$. Así que $d((2,2,3,-6),W)=0$

Una solución alternativa es aplicando las definiciones, es decir

$$
\begin{aligned}
d((2,2,3,-6),W) &= \|(2,2,3,-6)-P_W(2,2,3,-6)\|\\
&= \left\|(2,2,3,-6)-\left[\frac{2+2}{2}\,(1,1,0,0)+\frac{3-2(-6)}{5}\,(0,0,1,-2)\right]\right\|\\
&= \|(2,2,3,-6)-[2\,(1,1,0,0)+3\,(0,0,1,-2)]\|\\
&= \|(2,2,3,-6)-(2,2,3,-6)\|\\
&= 0
\end{aligned}
$$

(c) Determine el conjunto $U=\{u\in\mathbb{R}^4 \mid \langle u,w\rangle=0\ (\forall w; w\in \mathbb{W})\}$

(i) Sabemos que $\alpha=\{(1,1,0,0),(0,0,1,-2)\}$ es una base de W entonces

$$
\begin{aligned}
u\in U &\iff u\in\mathbb{R}^4\wedge \langle u,(1,1,0,0)\rangle=\langle u,(0,0,1,-2)\rangle=0\\
&\iff u=(x,y,t,z)\in\mathbb{R}^4\wedge \langle (x,y,t,z),(1,1,0,0)\rangle=\langle (x,y,t,z),(0,0,1,-2)\rangle=0\\
&\iff u=(x,y,t,z)\in\mathbb{R}^4\wedge \begin{array}{rcl} x+y &=& 0\\ t-2z &=& 0\end{array}\\
&\iff u=(x,y,t,z)\wedge -x=y\wedge t=2z\\
&\iff u=(x,-x,2z,z),\quad (x\in\mathbb{R}\wedge z\in\mathbb{R})\\
&\iff u=x(1,-1,0,0)+z(0,0,2,1),\quad (x\in\mathbb{R}\wedge z\in\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Así que

$$
U = \langle\{(1,-1,0,0),(0,0,2,1)\}\rangle
$$

(ii) Observamos finalmente para validar nuestro razonamiento que

$$\begin{array}{rcl}
\langle (1,-1,0,0),(1,1,0,0)\rangle & = & 0\\
\langle (1,-1,0,0),(0,0,1,-2)\rangle & = & 0\\
\langle (0,0,2,1),(1,1,0,0)\rangle & = & 0\\
\langle (0,0,2,1),(0,0,1,-2)\rangle & = & 0
\end{array}$$

(3) Si definimos, $T : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (\lambda a_0 - a_1) + (\lambda a_1 - a_0)x + (1-\lambda)a_2x^2$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

(a) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(R_2[x]) \quad (\forall \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R})$

Solución

En primer lugar, para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
T(p(x)+q(x)) & = & T((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2)\\
& = & \lambda(a_0+b_0)-(a_1+b_1)+(\lambda(a_1+b_1)-(a_0+b_0))x+(1-\lambda)(a_2+b_2)x^2\\
& = & (\lambda a_0+\lambda b_0)-(a_1+b_1)+((\lambda a_1+\lambda b_1)-(a_0+b_0))x+(1-\lambda)(a_2+b_2)x^2\\
& = & (\lambda a_0-a_1)+(\lambda b_0-b_1)+(\lambda a_1-a_0)x+(\lambda b_1-b_0)x+(1-\lambda)a_2x^2+(1-\lambda)b_2x^2\\
& = & (\lambda a_0-a_1)+(\lambda a_1-a_0)x+(1-\lambda)a_2x^2+(\lambda b_0-b_1)+(\lambda b_1-b_0)x+(1-\lambda)b_2x^2\\
& = & T(a_0+a_1x+a_2x^2)+T(b_0+b_1x+b_2x^2)\\
& = & T(p(x))+T(q(x))
\end{array}$$

En segundo lugar,

$$\begin{array}{rcl}
T(c\cdot p(x)) & = & T(c\cdot a_0+c\cdot a_1x+c\cdot a_2x^2)\\
& = & \lambda(c\cdot a_0)-(c\cdot a_1)+(\lambda(c\cdot a_1)-(c\cdot a_0))x+(1-\lambda)(c\cdot a_2)x^2\\
& = & c\cdot(\lambda a_0-a_1)+c\cdot(\lambda a_1-a_0)x+c\cdot(1-\lambda)a_2x^2\\
& = & c\cdot(\lambda a_0-a_1+(\lambda a_1-a_0)x+(1-\lambda)a_2x^2)\\
& = & c\cdot T(a_0+a_1x+a_2x^2)\\
& = & c\cdot T(p(x))
\end{array}$$

Así que, efectivamente $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(R_2[x]) \quad (\forall \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R})$.

(b) Determine el conjunto $S = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ es un isomorfismo}\}$

Solución

$$\lambda \in S \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge T \text{ es un isomorfismo}$$

Aquí, la condición a verificar es ¿cuándo T es un isomorfismo?, pero entonces tenemos alternativas tales como:

(i) Como $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(R_2[x]) \quad (\forall \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R})$ entonces debemos verificar ¿cuándo T es una biyección?. Pero, entonces por el teorema de la dimensión basta mostrar que T es inyectiva o T es sobreyectiva.

(ii) Equivalentemente podemos verificar ¿cuándo $\det(T) \neq 0$?

Emplearemos esta última técnica.

- En primer lugar, generamos una matriz que represente T para calcular su determinante, como éste es independiente de la base que se usa para representar a T entonces usando la base canónica $pol(2) = \{1, x, x^2\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
p(1) = \lambda - x &\Longrightarrow [p(1)]_{pol(2)} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
p(x) = \lambda x - 1 &\Longrightarrow [p(1)]_{pol(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \\
p(x^2) = 1 - \lambda &\Longrightarrow [p(x^2)]_{pol(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Y como $[T]_{pol(2)}^{pol(2)} = \begin{pmatrix} p(1) & p(x) & p(x^2) \end{pmatrix}$ entonces

$$[T]_{pol(2)}^{pol(2)} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

- En segundo lugar, $\det[T]_{pol(2)}^{pol(2)} = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$

- Para concluir, T será un isomorfismo si y sólo si,$\det[T]_{pol(2)}^{pol(2)} \neq 0$, y esto ocurre, salvo cuando $\lambda = \pm 1$. Por tanto $S = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

(4) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que, verifique simultáneamente las condiciones:

(a) $(\mathbb{R}^3)_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge z = 0\}$

(b) T diagonalizable

(c) T no es un isomorfismo

Solución

Debemos determinar, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, y que verifique además las condiciones exigidas.

- Decodificamos la información que guarda el conjunto $(\mathbb{R}^3)_2$.

  Por una parte,

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{R}^3)_2 &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ x - y = 0 \wedge z = 0 \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ x = y \wedge z = 0 \\
&\iff u = (x, x, 0), \quad x \in \mathbb{R} \\
&\iff u = x(1, 1, 0), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$(\mathbb{R}^3)_2 \quad = \quad \langle\{(1,1,0)\}\rangle$$

Y por otra parte

$$\begin{aligned} u \in (\mathbb{R}^3)_2 &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ T(u) = 2u \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ T(x,y,z) = 2(x,y,z) \end{aligned}$$

Así que como $(1,1,0) \in (\mathbb{R}^3)_2$ entonces $T(1,1,0) = 2(1,1,0) = (2,2,0)$

- Ahora T debe ser una transformación lineal, por tanto definida "en todo" $\mathbb{R}^3$. Así que como siempre formamos una base adecuada a la ocasión, como hay infinitas bases de $\mathbb{R}^3$, ya podemos concluir que hay muchas transformaciones que satisfarán estas condiciones.

Si definimos $\alpha = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$ entonces α es una base de $\mathbb{R}^3$, pues $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

Ahora, para construir T será necesario y suficiente que digamos cuanto vale T en los dos restantes elementos básicos. Una alternativa es definir:

$T(1,-1,0) = \lambda_1(0,1,0),\ \lambda_1 \in \mathbb{R}$
$T(0,0,1) = \lambda_2(0,0,1),\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$. No debemos olvidar que T debe ser diagonalizable.

En este caso tenemos lo siguiente, (aquí se ve la fortaleza de las bases ortogonales, en este caso respecto del producto interno usual !!!)

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= \frac{\langle (x,y,z),(1,1,0)\rangle}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) + \frac{\langle (x,y,z),(1,-1,0)\rangle}{\|(1,-1,0)\|^2}(1,-1,0) + \frac{\langle (x,y,z),(0,0,1)\rangle}{\|(0,0,1)\|^2}(0,0,1) \\ &= \frac{x+y}{2}(1,1,0) + \frac{x-y}{2}(1,-1,0) + z(0,0,1) \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \frac{x+y}{2}T(1,1,0) + \frac{x-y}{2}T(1,-1,0) + zT(0,0,1) \\ &= \frac{x+y}{2}(2,2,0) + \frac{x-y}{2}(\lambda_1,-\lambda_1,0) + z(0,0,\lambda_2) \\ &= \left(\frac{2x+2y}{2} + \frac{\lambda_1 x - \lambda_1 y}{2}, \frac{2x+2y}{2} + \frac{\lambda_1 y - \lambda_1 x}{2}, \lambda_2 z\right) \\ &= \left(\frac{(2+\lambda_1)x + (2-\lambda_1)y}{2}, \frac{(2-\lambda_1)x + (2+\lambda_1)y}{2}, \lambda_2 z\right) \end{aligned}$$

- Ahora T definida así es diagonalizable para cualquier elección de reales λ_1 y λ_2, pues

$$[T]_\alpha^\alpha \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- Sin embargo, existe una tercera condición que T debe cumplir, cual es que no sea un isomorfismo, esto quiere decir que $\det[T]_\alpha^\alpha = 0$ entonces basta escoger dos reales $\lambda_1 = 0$ ó $\lambda_2 = 0$.

Por tanto la T pedida es de la forma

$$T(x,y,z) \quad = \quad \left(\frac{(2+\lambda_1)x + (2-\lambda_1)y}{2}, \frac{(2-\lambda_1)x + (2+\lambda_1)y}{2}, \lambda_2 z\right) \quad (\lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0)$$