Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Solución Examen de Álgebra[1]
10 de Diciembre de 2007
Profesor Ricardo Santander Baeza

(1) Considere en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ el producto interno $\langle A,\, B\rangle = tr(B^t \cdot A)$. Si se define el subespacio de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

$$\mathbb{W} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

entonces determine:

(a) $\mathbb{P}_{\mathbb{W}}$, la proyección ortogonal de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ en $\mathbb{W}$ (Antes ortogonalice $\mathbb{W}$)

Solución

(i) En primer lugar, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) \leq 4$,

(ii) Como, $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ entonces

$$\mathbb{W} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Así que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) \leq 3$

(iii) Verifiquemos si $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) = 3$. Para ello estudiemos la dependencia lineal de los generadores.

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{lcl|} a_1 - a_2 & = & 0 \\ 2a_1 + 3a_2 & = & 0 \\ 4a_1 + 4a_2 + 7a_3 & = & 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + 4a_3 & = & 0 \\ \hline \end{array}$$
$$\Rightarrow \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Luego, los generadores son linealmente independientes y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) = 3$.

(iv) Ahora ortogonalizamos esa base de $\mathbb{W}$.

Sea $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

[1] Cada problema vale 1,5 puntos
Tiempo 120 '

Así que podemos escoger $w_2 = \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \text{ Pues}$$

$$\left\langle w_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Podemos como antes, escoger $w_3 = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Así que ahora tenemos que $\mathbb{W} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

(v) Ahora definimos $\mathbb{P}_{\mathbb{W}}$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathbb{W}}(A) &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \\ &\quad \frac{\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} -19 & 12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} + \\ &\quad \frac{\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) $d\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}, \mathbb{W}\right)$, la distancia del vector $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$ al subespacio $\mathbb{W}$

Solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{W} \Longrightarrow d\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}, \mathbb{W}\right) = 0$$

(2) Determine, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que verifique simultáneamente las propiedades,

(a) $(\mathbb{R}^3)_{-1} = \langle\{(-1,\, 1,\, 1)\}\rangle$,

(b) $(\mathbb{R}^3)_{2} = \langle\{(1,\, 0,\, 1), (1,1,1)\}\rangle$.

Solución

Si $\alpha = \{(-1,\, 1,\, 1), (1,\, 0,\, 1), (1,1,1)\}$ entonces α es una base de $\mathbb{R}^3$.

En efecto

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Entonces tiene solución única la ecuación $(x, y, z) = a_1(-1,\, 1,\, 1) + a_2(1,\, 0,\, 1) + a_3(1,1,1)$

En efecto

$$\begin{aligned}(x, y, z) = a_1(-1,\, 1,\, 1) + a_2(1,\, 0,\, 1) + a_3(1,1,1) \quad &\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{lcl} -a_1 + a_2 + a_3 & = & x \\ a_1 + a_3 & = & y \\ a_1 + a_2 + a_3 & = & z \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow \quad a_1 = \frac{z-x}{2} \wedge a_3 = \frac{2y - z + x}{2} \wedge a_2 = z - y\end{aligned}$$

Luego,

$$(x, y, z) = \frac{z-x}{2}(-1,\, 1,\, 1) + (z-y)(1,\, 0,\, 1) + \frac{2y-z+x}{2}(1,1,1)$$

Así que, si una tal T existe debe cumplir con

$$T(x, y, z) = \frac{z-x}{2}T(-1,\, 1,\, 1) + (z-y)T(1,\, 0,\, 1) + \frac{2y-z+x}{2}T(1,1,1)$$

Finalmente,

$$\begin{array}{lcl} (-1,1,1) \in (\mathbb{R}^3)_{-1} & \Longleftrightarrow & T(-1,1,1) = -(-1,1,1) = (1,-1,-1) \\ (1,0,1) \in (\mathbb{R}^3)_{2} & \Longleftrightarrow & T(1,0,1) = 2(1,0,1) = (2,0,2) \\ (1,1,1) \in (\mathbb{R}^3)_{2} & \Longleftrightarrow & T(1,1,1) = 2(1,1,1) = (2,2,2) \end{array}$$

Por tanto,

$$T(x, y, z) = \frac{z-x}{2}(1,-1,-1) + (z-y)(2,0,2) + \frac{2y-z+x}{2}(2,2,2)$$

(3) Considere dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ de dimensión finita, digamos $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = m$. Suponga además que $\mathbb{V} = \langle\{v_1,\, v_2,\, ...,\, v_n\}\rangle$. y que existe $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ tal que $\mathbb{W} = \langle\{\mathbf{T}(v_1),\, \mathbf{T}(v_2),\, ...,\, \mathbf{T}(v_n)\}\rangle$. Demuestre que $n \geq m$

Solución

$\mathbb{W} = \langle \{\mathbf{T}(v_1),\, \mathbf{T}(v_2),\, ...,\, \mathbf{T}(v_n)\} \rangle \Longrightarrow m = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) \leq n$, pues;

Si $\beta = \{\mathbf{T}(v_1),\, \mathbf{T}(v_2),\, ...,\, \mathbf{T}(v_n)\}$ es linealmente independiente entonces es una base de $\mathbb{W}$ y $m = dim_{\mathbb{K}}\mathbb{W} = n$

Si $\beta = \{\mathbf{T}(v_1),\, \mathbf{T}(v_2),\, ...,\, \mathbf{T}(v_n)\}$ es linealmente dependiente entonces existen menos que n vectores linealmente independiente en una base de $\mathbb{W}$ y $m = dim_{\mathbb{K}}\mathbb{W} < n$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial de dimensión n, $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}, \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \text{img } (T) = \mathbb{R} \ \vee \ \ker(T) = \mathbb{V}$$

Solución

En primer lugar, Por el teorema de la dimensión

$$n = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{R}}((Img(T)) \qquad (*)$$

En segundo lugar,

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1 \quad \text{e Img } (T) \leq \mathbb{R} \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\text{Img } (T)) \leq 1 \Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\text{Img } (T)) = 0 \vee \dim_{\mathbb{R}}(\text{Img } (T)) = 1$$

Finalmente,

Si $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img } (T)) = 0$ entonces de $(*)$, sigue que $n = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(T))$ y $\ker(T) \leq \mathbb{V}$ entonces $\ker(T) = \mathbb{V}$

Si $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img } (T)) = 1$ e $\text{Img } (T) \leq \mathbb{R}$ entonces $\text{Img } (T) = \mathbb{R}$