Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep N^o 4 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
06 de Diciembre del 2006

(1) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_\mathbb{R}(3)$. Demuestre que

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_\mathbb{R}(3)) \Longrightarrow \alpha = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right\} \text{es linealmente independiente en } \mathbb{M}_\mathbb{R}(3 \times 1)$$

Solución

P.d.q. α es linealmente independiente en $\mathbb{M}_\mathbb{R}(3 \times 1)$

Supongamos que $c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces sucederán las siguientes cuestiones

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_1a_{11} \\ c_1a_{21} \\ c_1a_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2a_{12} \\ c_2a_{22} \\ c_2a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_3a_{13} \\ c_3a_{23} \\ c_3a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} c_1a_{11} + c_2a_{12} + c_3a_{13} \\ c_1a_{21} + c_2a_{22} + c_3a_{23} \\ c_1a_{31} + c_2a_{32} + c_3a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c_2a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_\mathbb{R}(3))} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c_2a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que, α es linealmente independiente en $\mathbb{M}_\mathbb{R}(3 \times 1)$.

(2) Sea $\beta = \{1 + x, 1 - x, x + x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.

(a) Demuestre que β es una base de $\mathbb{R}_2[x]$

Solución

Etapa 1. Mostremos que β es linealmente independiente.

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Si suponemos que $a_1(1+x)+a_2(1-x)+a_3(x+x^2) = 0_{\mathbb{R}_2[x]}$ entonces tenemos las siguientes consecuencias

$$
\begin{aligned}
(a_1+a_2)+(a_1-a_2+a_3)x+a_3x^2 = 0+0x+0x^2 \quad &\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{lcl} a_1+a_2 & = & 0 \\ a_1-a_2+a_3 & = & 0 \\ a_3 & = & 0 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow \quad a_3 = 0 \wedge \left.\begin{array}{lcl} a_1+a_2 & = & 0 \\ a_1-a_2 & = & 0 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow \quad a_3 = 0 \wedge a_1 = 0 \wedge a_2 = 0
\end{aligned}
$$

Así que β es linealmente independiente en $\mathbb{R}_2[x]$

Etapa 2. Mostremos que β es un sistema de generadores para $\mathbb{R}_2[x]$.

Si $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ debemos resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación

$$a_1(1+x)+a_2(1-x)+a_3(x+x^2) = p(x)$$

entonces deberíamos tener las sucesivas equivalencias y consecuencias

$$
\begin{aligned}
(a_1+a_2)+(a_1-a_2+a_3)x+a_3x^2 = c_0+c_1x+c_2x^2 \quad &\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{lcl} a_1+a_2 & = & c_0 \\ a_1-a_2+a_3 & = & c_1 \\ a_3 & = & c_2 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow \quad a_3 = c_2 \wedge \left.\begin{array}{lcl} a_1+a_2 & = & c_0 \\ a_1-a_2 & = & c_1-c_2 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow \quad a_3 = c_2 \wedge a_1 = \frac{c_0+c_1-c_2}{2} \wedge a_2 = \frac{c_0-c_1+c_2}{2}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$c_0+c_1x+c_2x^2 \quad = \quad \left(\frac{c_0+c_1-c_2}{2}\right)(1+x) + \left(\frac{c_0-c_1+c_2}{2}\right)(1-x) + c_2(x+x^2)$$

Así que, β es un sistema de generadores para $\mathbb{R}_2[x]$, y por ende es una base para $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Si β es la base del punto anterior e $[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine, si es posible la base α

Solución

- Si $\alpha = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$ es la base pedida entonces por construcción debemos tener que

$$[I]_\alpha^\beta \quad = \quad ([p_0(x)]_\beta \quad [p_1(x)]_\beta \quad [p_2(x)]_\beta) \qquad (\clubsuit)$$

- Pero, por hipótesis tenemos que

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\clubsuit\clubsuit)$$

- Comparando ($\clubsuit$) y ($\clubsuit\clubsuit$), obtenemos la significativa igualdad

$$([p_0(x)]_\beta \quad [p_1(x)]_\beta \quad [p_2(x)]_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde concluimos que

$$\begin{aligned} ([p_0(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff p_0(x) = 1\cdot(1+x) + (-1)\cdot(1-x) + 1\cdot(x+x^2) = 3x + x^2 \\ ([p_1(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff p_0(x) = 1\cdot(1+x) + 1\cdot(1-x) + 0\cdot(x+x^2) = 2 \\ ([p_2(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff p_0(x) = 1\cdot(1+x) + 1\cdot(1-x) + 1\cdot(x+x^2) = 2 + x + x^2 \end{aligned}$$

- Finalmente, debemos verificar que $\alpha = \{3x + x^2, 2, 2 + x + x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$

Mostremos en primer lugar que α es linealmente independiente en $\mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned} a_0(3x+x^2) + a_1(2) + a_2(2+x+x^2) = 0_{\mathbb{R}[x]} &\iff (2a_1 + 2a_2) + (3a_0 + a_2)x + (a_0 + a_2)x^2 = 0_{\mathbb{R}[x]} \\ &\iff \left.\begin{array}{lrcl} (1) & 2a_1 + 2a_2 & = & 0 \\ (2) & 3a_0 + a_2 & = & 0 \\ (3) & a_0 + a_2 & = & 0 \end{array}\right| \overset{(2)-(3)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{rcl} 2a_1 + 2a_2 & = & 0 \\ 2a_0 & = & 0 \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0 \end{aligned}$$

Así que α es linealmente independiente en $\mathbb{R}_2[x]$

En segundo lugar verifiquemos que α es un sistema de generadores para $\mathbb{R}_2[x]$

Si $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ debemos resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación

$$a_0(3x+x^2) + a_1(2) + a_2(2+x+x^2) = p(x)$$

entonces deberíamos tener las sucesivas equivalencias y consecuencias

$$(2a_1+2a_2)+(3a_0+a_2)x+(a_0+a_2)x^2=p(x) \Longrightarrow \left.\begin{array}{llcl} (1) & 2a_1+2a_2 & = & c_0 \\ (2) & 3a_0+a_2 & = & c_1 \\ (3) & a_0+a_2 & = & c_2 \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow \underbrace{a_0=\frac{c_1-c_2}{2}}_{(2)-(3)} \wedge \underbrace{a_2=\frac{2c_2-c_1}{2}}_{\text{De }(3)} \wedge \underbrace{a_1=\frac{c_0-2c_2+c_1}{2}}_{\text{De }(1)}$$

Luego,

$$c_0+c_1x+c_2x^2 \quad = \quad \left(\frac{c_1-c_2}{2}\right)(3x+x^2)+\left(\frac{c_0-2c_2+c_1}{2}\right)(2)+\left(\frac{2c_2-c_1}{2}\right)(2+x+x^2)$$

Por tanto, α genera $\mathbb{R}_2[x]$, y por consiguiente es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(3) Si $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)$ es definida por $T(x,y,z)=(x \;\; (x+y) \;\; (x+y+\lambda z))$, y $\lambda\in\mathbb{R}$

(a) Demuestre que $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)) \quad (\forall\lambda;\lambda\in\mathbb{R})$
Solución

Sea $u\in\mathbb{R}^3$ y $v\in\mathbb{R}^3$. P.d.q. $T(u+v)=T(u)+T(v)$ entonces

$$\begin{array}{rcl} u\in\mathbb{R}^3 & \Longleftrightarrow & u=(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3 \\ v\in\mathbb{R}^3 & \Longleftrightarrow & v=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3 \end{array}$$

Así que,

$$\begin{array}{rcl} T(u+v) & = & T(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2) \\ & = & ((x_1+x_2) \;\; (x_1+x_2+y_1+y_2) \;\; (x_1+x_2+y_1+y_2+\lambda(z_1+z_2))) \\ & = & ((x_1+x_2) \;\; (x_1+y_1+x_2+y_2) \;\; (x_1+y_1+\lambda z_1+x_2+y_2+\lambda z_2))) \\ & = & (x_1 \;\; x_1+y_1 \;\; x_1+y_1+\lambda z_1)+(x_2 \;\; x_2+y_2 \;\; x_2+y_2+\lambda z_2) \\ & = & T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2) \\ & = & T(u)+T(v) \end{array}$$

Ahora, debemos mostrar que si $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ y $c\in\mathbb{R}$ entonces $T(cu)=cT(u)$
En efecto

$$\begin{array}{rcl} T(cu) & = & T(cx,cy,cz) \\ & = & (cx \;\; cx+cy \;\; cx+cy+\lambda cz) \\ & = & (cx \;\; c(x+y) \;\; c(x+y+\lambda z)) \\ & = & c(x \;\; (x+y) \;\; (x+y+\lambda z)) \\ & = & cT(x,y,z) \\ & = & cT(u) \end{array}$$

Luego, $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 3)) \quad (\forall\lambda;\lambda\in\mathbb{R})$

(b) Determine el conjunto $S = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T \text{ es un isomorfismo de espacios vectoriales}\}$
Solución

$$\begin{aligned}
\lambda \in S &\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ T \text{ es un isomorfismo de espacios vectoriales}\\
&\iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3)) \wedge \text{ es inyectiva y sobreyectiva}
\end{aligned}$$

En primer lugar,

$$T \text{ inyectiva} \iff \ker(T) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
u \in \ker(T) &\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge T(x, y, z) = (0 \ \ 0 \ \ 0)\\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge ((x \ \ x + y \ \ x + y + \lambda z)) = (0 \ \ 0 \ \ 0)\\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \wedge \lambda z = 0\\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \wedge \lambda \neq 0
\end{aligned}$$

Así que

$$T \text{ inyectiva} \iff \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Luego, $\mathbb{R} - \{0\} \subset S$
En segundo lugar,

$$T \text{ sobreyectiva} \iff Img(T) = \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1 \times 3)\}$$

Es decir para, $A = (a\ b\ c)$ dado, existe $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = A$ entonces

$$\begin{aligned}
T(u) = A &\iff T(x, y, z) = (a\ b\ c)\\
&\iff (x\ x + y\ x + y + \lambda z) = (a\ b\ c)\\
&\iff \left.\begin{array}{lcl} x & = & a\\ x + y & = & b\\ x + y + \lambda z & = & c \end{array}\right| \Longrightarrow x = a \wedge y = b - a \wedge \lambda z = c - b
\end{aligned}$$

Luego, $T(u) = A \iff \lambda \neq 0$, de donde sigue que

$$S \ = \ \mathbb{R} - \{0\}$$

(4) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[x])$ tal que se verifiquen simultáneamente las propiedades

(a) $(\mathbb{R}_3[x])_{\sqrt{2}} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$

(b) T no inyectiva

Solución

Etapa 1. Debemos construir un proyecto, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[x])$, es decir debemos decir,
¿Cuánto vale $T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)$?, y que además de ser un operador lineal, respete las restricciones propuestas.

Etapa 2. Gestión de la información

- Para construir una transformación lineal, y un operador lineal en particular, basta definirlo en una base y posteriormente extenderlo por linealidad.
- Debemos decodificar ahora al conjunto $(\mathbb{R}_3[x])_{\sqrt{2}}$, que es una de las restricciones.

Por una parte,

$$p(x) \in (\mathbb{R}_3[x])_{\sqrt{2}} \iff p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \wedge T(p(x)) = \sqrt{2}\, p(x) \qquad (\clubsuit)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
p(x) \in (\mathbb{R}_3[x])_{\sqrt{2}} &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \ \wedge\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \ \wedge\ a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\
&\iff p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \\
&\iff p(x) = a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + a_3(x^3-1) \ \wedge\ a_1 \in \mathbb{R},\ a_2 \in \mathbb{R},\ a_3 \in \mathbb{R} \\
&\iff p(x) \in \langle\{(x-1), (x^2-1), (x^3-1)\}\rangle
\end{aligned}$$

Luego, $(\mathbb{R}_3[x])_{\sqrt{2}} = \langle\{(x-1), (x^2-1), (x^3-1)\}\rangle$, y $\dim_{\mathbb{R}}\left((\mathbb{R}_3[x])_{\sqrt{2}}\right) \leq 3$, pero el conjunto $\beta \ = \ \{(x-1), (x^2-1), (x^3-1)\}$ es linealmente independiente, pues

$$\begin{aligned}
c_1(x-1) + c_2(x^2-1) + c_3(x^3-1) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} &\implies (-c_1 - c_2 - c_3) + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \\
&\implies (-c_1 - c_2 - c_3) = 0 \wedge c_1 = 0 \wedge c_2 = 0 \wedge c_3 = 0 \\
&\implies c_1 = 0 \wedge c_2 = 0 \wedge c_3 = 0
\end{aligned}$$

Así que β es un base de $(\mathbb{R}_3[x])_{\sqrt{2}}$ y $\dim_{\mathbb{R}}\left((\mathbb{R}_3[x])_{\sqrt{2}}\right) = 3$
Además de $(\clubsuit)$ sigue que:

$$\begin{aligned}
T(x-1) &= \sqrt{2}\,(x-1) \\
T(x^2-1) &= \sqrt{2}\,(x^2-1) \\
T(x^3-1) &= \sqrt{2}\,(x^3-1)
\end{aligned}$$

Ahora para completar esta parte de la tarea, debemos extender β a una base de $\mathbb{R}_3[x]$. Sea entonces $\alpha = \{(x-1), (x^2-1), (x^3-1), 1\}$ el candidato a base

En primer, lugar verifiquemos si α es linealmente independiente en $\mathbb{R}_3[x]$

$$\begin{aligned}
c_1(x-1) + c_2(x^2-1) + c_3(x^3-1) + c_4 \cdot 1 = 0_{\mathbb{R}_3[x]} &\implies (-c_1 - c_2 - c_3 + c_4) + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \\
&\implies (-c_1 - c_2 - c_3 + c_4) = 0 \wedge c_1 = 0 \wedge c_2 = 0 \wedge c_3 = 0 \\
&\implies c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0
\end{aligned}$$

Así que α es linealmente independiente en $\mathbb{R}_3[x]$.

Ahora verifiquemos si α es un sistema de generadores para $\mathbb{R}_3[x]$

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &= c_1(x-1) + c_2(x^2-1) + c_3(x^3-1) + c_4 \cdot 1 \\
&\Updownarrow \\
a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &= (-c_1 - c_2 - c_3 + c_4) + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3
\end{aligned}$$

De donde sigue que

$$\left.\begin{array}{lcl}
-c_1 - c_2 - c_3 + c_4 &=& a_0 \\
c_1 &=& a_1 \\
c_2 &=& a_2 \\
c_3 &=& a_3
\end{array}\right| \implies c_1 = a_1 \wedge c_2 = a_2 \wedge c_3 = a_3 \wedge c_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

Por tanto,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad = \quad a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + a_3(x^3-1) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \cdot 1$$

- Para cumplir con la última condición basta definir $T(1) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

Etapa 3. Fin de la construcción

$$\begin{aligned}
T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) &= a_1T(x-1) + a_2T(x^2-1) + a_3T(x^3-1) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \cdot T(1) \\
&= a_1\sqrt{2}(x-1) + a_2\sqrt{2}(x^2-1) + a_3\sqrt{2}(x^3-1) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \cdot (0 + 0x + 0x^2 + 0x^3) \\
&= \sqrt{2}(a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + a_3(x^3-1)) \\
&= \sqrt{2}(-a_1 - a_2 - a_3) + \sqrt{2}a_1x + \sqrt{2}a_2x^2 + \sqrt{2}a_3x^3
\end{aligned}$$