Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep Nº 3 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
25 de Octubre del 2006

1.1 Sea α una raíz cúbica de la unidad y $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & (\alpha-1) \\ -1 & (\alpha-1) & \alpha \\ (\alpha-1) & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(3)$. Demuestre que $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(3))$

Solución

$$A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(3)) \iff \det(A) \neq 0$$

Entonces procedemos a calcular el $\det(A)$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} \alpha & -1 & (\alpha-1) \\ -1 & (\alpha-1) & \alpha \\ (\alpha-1) & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad l_3 \to l_3 - l_2 \\
&= \det \begin{pmatrix} \alpha & -1 & (\alpha-1) \\ -1 & (\alpha-1) & \alpha \\ \alpha & 1 & 1-\alpha \end{pmatrix} \quad l_3 \to l_3 - l_1 \\
&= \det \begin{pmatrix} \alpha & -1 & (\alpha-1) \\ -1 & (\alpha-1) & \alpha \\ 0 & 2 & 2-2\alpha \end{pmatrix} \quad l_1 \to l_1 + \alpha l_2 \\
&= \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2-\alpha-1 & \alpha^2+\alpha-1 \\ -1 & (\alpha-1) & \alpha \\ 0 & 2 & 2-2\alpha \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \alpha^2-\alpha-1 & \alpha^2+\alpha-1 \\ 2 & 2-2\alpha \end{pmatrix} \\
&= (\alpha^2-\alpha-1)(2-2\alpha) - 2(\alpha^2+\alpha-1) \\
&= 2\alpha^2 - 2\alpha^3 - 2\alpha \\
&= 2(\alpha^2-\alpha-1) \\
&= 2(\alpha^2+\alpha^2) \qquad (\text{pues } 1+\alpha+\alpha^2 = 0) \\
&= 4\alpha^2 \neq 0
\end{aligned}$$

Luego, $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(3))$.

[1]Cada problema vale 2.0 puntos.
Tiempo 120'

1.2 Si $A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ tal que $a_{ij}=\begin{cases}(i-a^{i-1}) & : \text{si } i=j\\ 1 & : \text{si } i\neq j\end{cases}$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{a\in\mathbb{R}\mid A\in\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Solución

$$\begin{aligned} a\in\mathbb{S} &\iff a\in\mathbb{R}\wedge A\in\mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)\\ &\iff a\in\mathbb{R}\wedge \det(A)\neq 0\end{aligned}$$

Entonces procedemos a calcular el $\det(A)$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix}(1-a^{1-1}) & 1 & 1 & 1\\ 1 & (2-a^{2-1}) & 1 & 1\\ 1 & 1 & (3-a^{3-1}) & 1\\ 1 & 1 & 1 & (4-a^{4-1})\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & (2-a) & 1 & 1\\ 1 & 1 & (3-a^2) & 1\\ 1 & 1 & 1 & (4-a^3)\end{pmatrix} \begin{array}{l} l_3\to l_3-l_2\\ l_4\to l_4-l_2\end{array}\\
&= \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & (2-a) & 1 & 1\\ 0 & a-1 & (2-a^2) & 0\\ 0 & a-1 & 0 & (3-a^3)\end{pmatrix}\\
&= -\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a-1 & (2-a^2) & 0\\ a-1 & 0 & (3-a^3)\end{pmatrix} \begin{array}{l} l_2\to l_2-(a-1)l_1\\ l_3\to l_3-(a-1)l_1\end{array}\\
&= -\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & (3-a-a^2) & 1-a\\ 0 & 1-a & (4-a-a^3)\end{pmatrix}\\
&= -\det\begin{pmatrix}(3-a-a^2) & 1-a\\ 1-a & (4-a-a^3)\end{pmatrix}\\
&= (1-a)^2-(3-a-a^2)(4-a-a^3)
\end{aligned}$$

$$\mathbb{S} \;=\; \{a\in\mathbb{R}\mid (1-a)^2\neq(3-a-a^2)(4-a-a^3)\}$$

2.1 Sea $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$. Demuestre que $z^n+\overline{z}^{\,n}=2\cos\dfrac{n\pi}{3}\quad(\forall n;n\in\mathbb{N})$.

Solución

Como, $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$ y debemos calcular potencias $n-$ésimas entonces será conveniente utilizar la forma polar de z. Así que procedemos en consecuencia

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i &= \left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right|(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)\\
&= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\,(\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha)\\
&= (\cos\alpha + i \text{ sen } \alpha) \qquad\qquad (*)
\end{aligned}
$$

Así que, $(*)$ es sostenible si y sólo si se verifica $\left.\begin{array}{rcl}\cos\alpha &=& \frac{1}{2}\\ \text{sen }\alpha &=& \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right]$, Pero

$$
\left.\begin{array}{rcl}\cos\alpha &=& \frac{1}{2}\\ \text{sen }\alpha &=& \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right] \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}
$$

Así que, $z = \cos\dfrac{\pi}{3} + i \text{ sen } \dfrac{\pi}{3}$, y entonces

$$
\begin{aligned}
z^n + \overline{z}^{\,n} &= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{\pi}{3}\right)^n + \left(\cos\frac{\pi}{3} - i \text{ sen } \frac{\pi}{3}\right)^n\\
&= \cos\frac{n\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{3} - i \text{ sen } \frac{n\pi}{3} \qquad \text{(Aplicando De Moivre)}\\
&= 2\cos\frac{n\pi}{3}
\end{aligned}
$$

2.2 Sea $\alpha \neq 1$ una raíz cúbica de la unidad. Demuestre que $\dfrac{(1+\alpha^2)^4}{\alpha} = 1$

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{(1+\alpha^2)^4}{\alpha} &= \frac{(1+\alpha^2)^2(1+\alpha^2)^2}{\alpha}\\
&= \frac{(1+2\alpha^2+\alpha^4)(1+2\alpha^2+\alpha^4)}{\alpha}\\
&= \frac{(1+2\alpha^2+\alpha)(1+2\alpha^2+\alpha)}{\alpha} \qquad \text{(Usamos el hecho que } a^3 = 1)\\
&= \frac{(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^2)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^2)}{\alpha}\\
&= \frac{(\overbrace{1+\alpha+\alpha^2}^{0}+\alpha^2)(\overbrace{1+\alpha+\alpha^2}^{0}+\alpha^2)}{\alpha} \qquad \text{Pues, } \frac{\overbrace{\alpha^3-1}^{0}}{\alpha-1} = 1+\alpha+\alpha^2\\
&= \frac{\alpha^4}{\alpha}\\
&= \frac{\alpha}{\alpha} \qquad (a^3 = 1)\\
&= 1
\end{aligned}
$$

3.1 Considere le sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcccc} x & - & 2y & + & \dfrac{b-a}{5} & = & 0\\ 2x & + & 4y & + & (2b-2a+2) & = & 0\\ 4x & + & 2y & - & 2a & = & 0\\ 3x & + & 3y & - & 3b & = & 0 \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine el conjunto

$$S \;=\; \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (\star) \text{ tiene solución}\}$$

Solución

Etapa 1. El sistema $(\star)$ tiene solución si el rango de su matriz de coeficientes coincide con el rango de su matriz ampliada, (esto es aplicando el teorema del rango).

Reordenando el sistema $(\star)$, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{rcrcccc} x & - & 2y & + & \dfrac{b-a}{5} & = & 0\\ 2x & + & 4y & + & (2b-2a+2) & = & 0\\ 4x & + & 2y & - & 2a & = & 0\\ 3x & + & 3y & - & 3b & = & 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcrcccccc} 5x & - & 10y & = & a & - & b & & \\ x & + & 2y & = & a & - & b & - & 1\\ 2x & + & y & = & a & & & & \\ x & + & y & = & b & & & & \end{array}\right|$$

Etapa 2. Procedemos a escalonar la correspondiente matriz ampliada asociada al sistema $(\star)$.

$$\left[\begin{array}{cc|l} 5 & -10 & a-b\\ 1 & 2 & a-b-1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & 1 & b \end{array}\right] \quad \begin{array}{l}(l_1\to l_1-5l_4)\\ (l_2\to l_2-l_4)\\ (l_3\to l_2-2l_4)\end{array} \quad \left[\begin{array}{cr|r} 0 & -15 & a-6b\\ 0 & 1 & a-2b-1\\ 0 & -1 & a-2b\\ 1 & 1 & b \end{array}\right] \quad (l_1\leftrightarrow l_4)$$

$$\left[\begin{array}{cr|r} 1 & 1 & b\\ 0 & 1 & a-2b-1\\ 0 & -1 & a-2b\\ 0 & -15 & a-6b \end{array}\right] \quad \begin{array}{l}(l_1\to l_1-l_2)\\ (l_3\to l_3+l_2)\\ (l_4\to l_4+15l_2)\end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & 3b-a+1\\ 0 & 1 & a-2b-1\\ 0 & 0 & 2a-4b-1\\ 0 & 0 & 16a-36b-15 \end{array}\right]$$

Etapa 3. Aplicamos el teorema del rango, y $(\star)$ tiene solución si:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2a-4b & = & 1\\ 16a-36b & = & 15 \end{array}\right| \Longrightarrow a=-3\wedge b=-\frac{7}{4}$$

Luego,

$$S \;=\; \left\{\left(-3,-\frac{7}{4}\right)\right\}$$