Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución de la Pep N° 2 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
27 de julio del 2006

(1) Sea $\mathbb{U}=\left\{A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\mid a_{11}+a_{22}=0\right\}$. Define en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ la relación:

$$A\,\Re\,B \iff (A-B)\in\mathbb{U}.\qquad (\text{Para cada } A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2),\ \text{y } B\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$$

(a) Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia
Solución
P.d.q. $\Re$ es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.
Etapa 1. P.d.q.$\Re$ es una relación reflexiva
$\left(\forall A; A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\right)$ tenemos por definición que

$$\begin{aligned}
A-A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12}\\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,

$$A-A=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge 0+0=0 \implies A-A\in\mathbb{U}\implies A\Re A.$$

Así que $\Re$ es reflexiva.
Etapa 2. P.d.q. que $\Re$ es una relación simétrica
Supongamos que $A\Re B$, donde $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned}
A\Re B &\iff A-B\in\mathbb{U}\\
&\iff \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge(a_{11}-b_{11})+(a_{22}-b_{22})=0\\
&\implies -\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge-[(a_{11}-b_{11})+(a_{22}-b_{22})]=0\\
&\implies -\begin{pmatrix} -a_{11}+b_{11} & -a_{12}+b_{12}\\ -a_{21}+b_{21} & -a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge(-a_{11}+b_{11})+(-a_{22}+b_{22})=0\\
&\implies \begin{pmatrix} b_{11}-a_{11} & b_{12}-a_{12}\\ b_{21}-a_{21} & b_{22}-a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge(b_{11}-a_{11})+(b_{22}-a_{22})=0\\
&\implies B-A\in\mathbb{U}\\
&\implies B\Re A
\end{aligned}$$

Así que $\Re$ es una relación simétrica Etapa 3. P.d.q. $\Re$ es una relación transitiva

[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Supongamos que $A\Re B$,y $B\Re C$ donde $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{array}{rcll} A\Re B & \Longleftrightarrow & A-B\in \mathbb{U} & \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge (a_{11}-b_{11})+(a_{22}-b_{22})=0 & (1)\\ B\Re C & \Longleftrightarrow & B-C\in \mathbb{U} & \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} b_{11}-c_{11} & b_{12}-c_{12}\\ b_{21}-c_{21} & b_{22}-c_{22}\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge (b_{11}-c_{11})+(b_{22}-c_{22})=0 & (2)\end{array}$$

De (1) y (2) sigue que

$$\begin{array}{rcl} (A-B)+(B-C) & = & \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11}-c_{11} & b_{12}-c_{12}\\ b_{21}-c_{21} & b_{22}-c_{22}\end{pmatrix}\\ & \Downarrow & \\ A-B+B-C & = & \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}+b_{11}-c_{11} & a_{12}-b_{12}+b_{12}-c_{12}\\ a_{21}-b_{21}+b_{21}-c_{21} & a_{22}-b_{22}+b_{22}-c_{22}\end{pmatrix}\\ & \Downarrow & \\ A-C & = & \begin{pmatrix} a_{11}-c_{11} & a_{12}-c_{12}\\ a_{21}-c_{21} & a_{22}-c_{22}\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\end{array}$$

Y también sigue que

$$\begin{array}{rcl} (a_{11}-b_{11})+(a_{22}-b_{22})+(b_{11}-c_{11})+(b_{22}-c_{22}) & = & 0+0\\ & \Downarrow & \\ (a_{11}-b_{11})+(b_{11}-c_{11})+(a_{22}-b_{22})+(b_{22}-c_{22}) & = & 0+0\\ & \Downarrow & \\ a_{11}-c_{11}+a_{22}-c_{22} & = & 0\end{array}$$

De donde sigue que $A-C\in\mathbb{U}$ y $A\Re C$, y $\Re$ es una relación transitiva.

(b) Demuestre que $\overline{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}=\mathbb{U}$

Solución

$$\begin{array}{rcl} A\in \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}} & \Longleftrightarrow & A\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge A\Re\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ & \Longleftrightarrow & A\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge A-\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{U}\\ & \Longleftrightarrow & A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{U}\\ & \Longleftrightarrow & A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{U}\\ & \Longleftrightarrow & A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge a_{11}+a_{22}=0\\ & \Longleftrightarrow & A\in\mathbb{U}\end{array}$$

Así que, $\overline{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}=\mathbb{U}$

(2) Determine el área de un rectángulo R inscrito en la sección cónica $C:\quad 2x^2+2y^2-4x+12y+10=0$. Si el punto $P=(2,y_0)\in C$ y es uno de los vértices de R.

Solución

De entre las muchas soluciones que pueden encontrarse al problema, describiré sólo dos de ellas.

$$\begin{aligned}
P=(2,y_0)\in C &\iff 2\cdot 0^2+2y_0^2-4\cdot 0+12y_0+10=0\\
&\iff 2y_0^2+12y_0+10=0\\
&\iff y_0^2+6y_0+5=0\\
&\iff (y_0+1)(y_0+5)=0\\
&\implies y_0=-1 \vee y_0=-5
\end{aligned}$$

Luego, $P=(2,-1)\in C\cap R$ y $Q=(2,-5)\in C\cap R$. (1)

Por otra parte, si hacemos $y=-1$ en la ecuación de C tenemos que

$$\begin{aligned}
2x^2+2(-1)^2-4x+12(-1)+10 &= 0\\
2x^2+2-4x-12+10 &= 0\\
2x^2-4x &= 0\\
x(x-2) &= 0
\end{aligned}$$

Así que, $S=(2,0)\in C\cap R$. Por tanto que el área A es $A=4\cdot 2=8$

Solución alternativa

Etapa 1. Ponemos la sección cónica en su forma canónica

$$\begin{aligned}
C &\iff x^2+y^2-2x+6y+5=0\\
&\iff x^2-2x+y^2+6y+5=0\\
&\iff (x-1)^2+(y-(-3))^2=5
\end{aligned}$$

Así que C es una circunferencia con centro en O=(1,-3)

Etapa 2. Sustituyendo el punto P en C tenemos que:

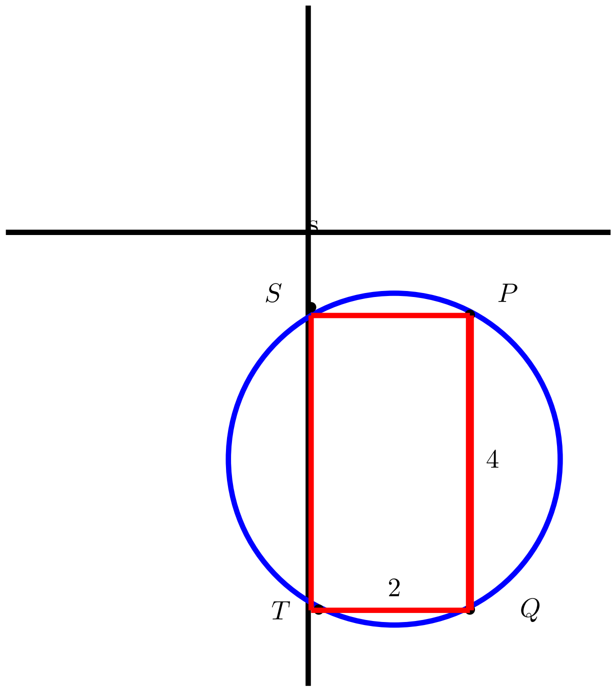
$$\begin{aligned}
P=(2,y_0)\in C &\iff (2-1)^2+(y-(-3))^2=5\\
&\iff (y-(-3))^2=4\\
&\iff y=-3\pm 2\\
&\implies \begin{cases} P=(2,-1)\in C\\ Q=(2,-5)\in C\end{cases}
\end{aligned}$$

Etapa 3. Sustituyendo el punto $(x_0,-1)$ en C tenemos que

$$\begin{aligned}
(x_0,-1)\in C &\iff (x_0-1)^2+(-1-(-3))^2=5\\
&\iff (x_0-1)^2=1\\
&\iff x_0=1\pm 1\\
&\implies \begin{cases} S=(0,-1)\in C\\ Q=(2,-1)\in C\end{cases}
\end{aligned}$$

Análogamente, sustituyendo el punto $(x_0,-5)$ en C tenemos que

$$\begin{aligned}
(x_0,-5)\in C &\iff (x_0-1)^2+(-5-(-3))^2=5\\
&\iff (x_0-1)^2=1\\
&\iff x_0=1\pm 1\\
&\implies \begin{cases} T=(0,-5)\in C\\ Q=(2,-5)\in C\end{cases}
\end{aligned}$$



(3) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ tal que $T(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b+2c \\ 3a+3b-c \end{pmatrix}$.

(a) Demuestre que T es un isomorfismo de grupos
Solución
Etapa 1. Debemos mostrar que T es un homomorfismo de grupos
Así que si consideramos $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, debemos mostrar que $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$$
\begin{aligned}
T(u+v) &= T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\
&= T((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)) \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \\ x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) \\ 3(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 \\ x_1 + x_2 - y_1 - y_2 + 2z_1 + 2z_2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3y_1 + 3y_2 - z_1 - z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2 \\ x_1 - y_1 + 2z_1 + x_2 - y_2 + 2z_2 \\ 3x_1 + 3y_1 - z_1 + 3x_2 + 3y_2 - z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_1 - y_1 + 2z_1 \\ 3x_1 + 3y_1 - z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 + z_2 \\ x_2 - y_2 + 2z_2 \\ 3x_2 + 3y_2 - z_2 \end{pmatrix} \\
&= T((x_1, y_1, z_1)) + T((x_2, y_2, z_2)) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}
$$

Etapa 2. P.d.q. T es inyectiva. e.e P.d.q. $\ker(T)=\{(0,0,0)\}$

$$
\begin{aligned}
u\in\ker(T) &\iff u\in\mathbb{R}^3\wedge T(u)=0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)}\iff u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\wedge T(x,y,z)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\wedge \left.\begin{array}{lcl} x+y+z &=& 0\\ x-y+2z &=& 0\\ 3x+3y-z &=& 0\end{array}\right| \Longrightarrow u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\wedge \left.\begin{array}{lcl} x+y+z &=& 0\\ x-y+2z &=& 0\\ x+y &=& \frac{z}{3}\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\wedge \left.\begin{array}{lcl} \frac{z}{3}+z &=& 0\\ x-y+2z &=& 0\\ x+y &=& \frac{z}{3}\end{array}\right| \Longrightarrow u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\wedge \left.\begin{array}{lcl} z &=& 0\\ x-y &=& 0\\ x+y &=& 0\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\wedge \left.\begin{array}{lcl} z &=& 0\\ x-y &=& 0\\ 2x &=& 0\end{array}\right| \Longrightarrow u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\wedge x=y=z=0
\end{aligned}
$$

Luego $\ker(T)=\{(0,0,0)\}$, y T es inyectiva.

Etapa 3. P.d.q. T es sobreyectiva. e.e P.d.q. $\operatorname{Img}(T)=\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$

En primer lugar, como T es una función entonces $\operatorname{Img}(T)\subset\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$, de forma que es suficiente mostrar que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)\subset\operatorname{Img}(T)$, lo que significa en realidad mostrar que para cada elemento $A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ existe un trio $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $T(u)=A$ entonces manos a la obra

$$
\begin{aligned}
T(u)=A &\iff T(x,y,z)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}x+y+z\\x-y+2z\\3x+3y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\iff \left.\begin{array}{lcl} x+y+z &=& a\\ x-y+2z &=& b\\ 3x+3y-z &=& c\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} x+y+z &=& a\\ x-y+2z &=& b\\ x+y &=& \frac{c+z}{3}\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} \frac{c+z}{3}+z &=& a\\ x-y+2z &=& b\\ x+y &=& \frac{c+z}{3}\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} z &=& \frac{3a-c}{4}\\ x-y+2z &=& b\\ x+y &=& \frac{c+z}{3}\end{array}\right| \iff \left.\begin{array}{lcl} z &=& \frac{3a-c}{4}\\ x-y+\frac{3a-c}{2} &=& b\\ x+y &=& \frac{c+a}{4}\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} z &=& \frac{3a-c}{4}\\ x-y &=& \frac{2b-3a+c}{2}\\ x+y &=& \frac{c+a}{4}\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} z &=& \frac{3a-c}{4}\\ x-y &=& \frac{2b-3a+c}{2}\\ 2x &=& \frac{c+a}{4}+\frac{2b-3a+c}{2}\end{array}\right| \iff \left.\begin{array}{lcl} z &=& \frac{3a-c}{4}\\ x-y &=& \frac{2b-3a+c}{2}\\ 2x &=& \frac{c+a+4b-6a+2c}{4}\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} z &=& \frac{3a-c}{4}\\ x-y &=& \frac{2b-3a+c}{2}\\ x &=& \frac{3c+4b-5a}{8}\end{array}\right| \iff \left.\begin{array}{lcl} z &=& \frac{3a-c}{4}\\ y &=& \frac{3c+4b-5a}{8}-\frac{2b-3a+c}{2}\\ x &=& \frac{3c+4b-5a}{8}\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} z &=& \frac{3a-c}{4}\\ y &=& \frac{3c+4b-5a-8b+12a-4c}{8}\\ x &=& \frac{3c+4b-5a}{8}\end{array}\right| \iff \left.\begin{array}{lcl} z &=& \frac{3a-c}{4}\\ y &=& \frac{7a-4b-c}{8}\\ x &=& \frac{3c+4b-5a}{8}\end{array}\right|
\end{aligned}
$$

Luego,

$$A=T(x,y,z)=T\left(\frac{3c+4b-5a}{8},\frac{7a-4b-c}{8},\frac{3a-c}{4}\right)\qquad (*)$$

Así que $A \in \operatorname{Img}(T)$, y T es sobreyectiva, y por ende un isomorfismo.

(b) Determine T^{-1}

Solución
De $(*)$ sigue que

$$T^{1}: \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \longmapsto \mathbb{R}^3 : T^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left(\frac{3c+4b-5a}{8}, \frac{7a-4b-c}{8}, \frac{3a-c}{4}\right)$$

En particular, para nuestra tranquilidad espiritual tenemos que

$$\begin{aligned}
(T^{-1}\circ T)(x,y,z) &= T^{-1}(T(x,y,z)) \\
&= T^{-1}\begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+2z \\ 3x+3y-z \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{3(3x+3y-z)+4(x-y+2z)-5(x+y+z)}{8}, \frac{7(x+y+z)-4(x-y+2z)-(3x+3y-z)}{8},\right. \\
&\quad \left.\frac{3(x+y+z)-(3x+3y-z)}{4}\right) \\
&= (x,y,z)
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
(T\circ T^{-1})\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= T\left(T^{-1})\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) \\
&= T\left(\frac{3c+4b-5a}{8}, \frac{7a-4b-c}{8}, \frac{3a-c}{4}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3c+4b-5a}{8} + \frac{7a-4b-c}{8} + \frac{3a-c}{4} \\ \frac{3c+4b-5a}{8} - \frac{7a-4b-c}{8} + 2\frac{3a-c}{4} \\ 3\frac{3c+4b-5a}{8} + 3\frac{7a-4b-c}{8} - \frac{3a-c}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, esta T^{-1} es la función inversa de T.

(4) Si Consideramos los conjuntos de números reales $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, con $(a_1 \neq a_2 \neq \cdots \neq a_n)$, $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, con $(b_1 \neq b_2 \neq \cdots \neq b_m)$ y una función $f : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{B}$. Demuestre que

$$f \text{ inyectiva y sobreyectiva} \quad \Longrightarrow \quad n = m$$

Solución
Etapa 1. Como f es función entonces

$$\operatorname{Img}(f) \quad = \quad \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} \subset B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

Etapa 2. Como f es una función inyectiva entonces

$$a_1 \neq a_2 \neq \cdots \neq a_n \quad \Longrightarrow \quad f(a_1) \neq f(a_2) \neq \cdots \neq f(a_n)$$

De las Etapas 1. y 2. sigue que $n \leq m$

Etapa 3. Como f sobreyectiva entonces $\operatorname{Img}(f) = B$. Así que

$$\{b_1, b_2, \dots, b_m\} \subset \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} \Longrightarrow m \leq n$$

Finalmente de $n = m$