Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep N^o 1 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
21 de junio del 2006

(1) Si para las proposiciones lógicas p y q, se define el conectivo lógico $*$ como sigue:

$$p * q \text{ es Falsa si y sólo si } p \text{ y } q \text{ son verdaderas, caso contrario } p * q \text{ es Verdadera}$$

Demuestre usando propiedades, que la siguiente proposición es una tautología

$$[(p \Longrightarrow q) \vee q] \Longleftrightarrow [(p \wedge \sim q) * \sim q]$$

Solución

Etapa 1. Por demostrar que (1) es una tautología.

Etapa 2 Gestión de la información

En primer lugar, la definición de $(*)$ es equivalente a $\sim (p \wedge q)$, pues

p	q	$p * q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

y

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

(2)

Así que,

$$\begin{array}{rcll} [(p \wedge \sim q) * \sim q] & \Longleftrightarrow & \sim [(p \wedge \sim q) \wedge \sim q] & \text{(Por (2))} \\ & \Longleftrightarrow & \sim (p \wedge \sim q) \vee q & \text{(De Morgan)} \\ & \Longleftrightarrow & (\sim p \vee q) \vee q & \text{(De Morgan)} \\ & \Longleftrightarrow & [(p \Longrightarrow q) \vee q] & \text{(Tautología)} \end{array}$$

Solución Alternativa; usando directamente la definición de $*$

$$\begin{array}{rcl} [(p \Longrightarrow q) \vee q] & \Longleftrightarrow & [(p \wedge \sim q) * \sim q] \\ & \Updownarrow & \\ (\sim p \vee q) \vee q] & \Longleftrightarrow & [(p \wedge \sim q) * \sim q] \\ & \Updownarrow & \\ \sim p \vee q & \Longleftrightarrow & \sim (\sim p \vee q) * \sim q \end{array} \qquad (3)$$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Ahora, analizamos las posibilidades de (3)

Caso 1. $(\sim p \vee q)$ Verdadera.

$$\begin{array}{rclll}
(\sim p \vee q) \text{ Verdadera} & \Longrightarrow & \sim(\sim p \vee q) & \text{Falsa} & \text{(Negación)} \\
& \Longrightarrow & \sim(\sim p \vee q) * \sim q & \text{Verdadera} & \text{(Definición de } *)
\end{array}$$

Luego,

$$\underbrace{(\sim p \vee q) \text{ Verdadera} \Longleftrightarrow \sim(\sim p \vee q) * \sim q \text{ Verdadera}}_{\text{Verdadera}}$$

Caso 2. $(\sim p \vee q)$ Falsa. (Es decir $\sim p$ falsa y q falsa)

$$\begin{array}{rclll}
(\sim p \vee q) \text{ Falsa} & \Longrightarrow & \sim(\sim p \vee q) & \text{Verdadera} & \text{(Negación)} \\
& \Longrightarrow & \sim(\sim p \vee q) * \sim q & \text{Falsa} & \text{(Definición de } *)
\end{array}$$

Luego,

$$\underbrace{(\sim p \vee q) \text{ Falsa} \Longleftrightarrow \sim(\sim p \vee q) * \sim q \text{ Falsa}}_{\text{Verdadera}}$$

(2) Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula proposicional:

$F(n): \ 4n^3 + 5n$ es divisible por 3. Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Solución
Etapa 1. P.d.q. $F(1)$ es verdadera

$$\begin{array}{rcl}
4 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1 & = & 9 \\
& = & 3 \cdot 3
\end{array}$$

Luego, $4 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1$ es divisible por 3, y $F(1)$ es verdadera.

Etapa 2. Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera. e.e.

$$4n^3 + 5n \ = \ 3 \cdot t \quad (\text{ para algún } t) \qquad (H)$$

Etapa 3. Tesis de inducción.

Por demostrar que $F(n+1)$ es verdadera. e.e Por demostrar que existe k tal que

$$4(n+1)^3 + 5(n+1) \ = \ 3 \cdot k$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
4(n+1)^3+5(n+1) &= 4(n^3+3n^2+3n+1)+5n+5\\
&= 4n^3+12n^2+12n+4+5n+5\\
&= (4n^3+5n)+12n^2+12n+9\\
&\overset{(H)}{=} 3\cdot t+3(4n^2+4n+3)\\
&= 3[t+4n^2+4n+3]
\end{aligned}
$$

Así que, $4(n+1)^3+5(n+1)$ es divisible por 3 y entonces $F(n+1)$ es verdadera, y por tanto la fórmula es verdadera $(4\forall n; n \in \mathbb{N})$.

---

(3) Si el conjunto $A = \{\frac{5}{3}, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{2n}\} \subset \mathbb{R}$ satisface simultáneamente las siguientes propiedades:

(a) A es una Progresión Aritmética

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} = 46$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{2i} = 69$

(d) $a_1 = a_{2n} - \dfrac{13}{3}$

Entonces determine el número de términos de la Progresión Aritmética.

Solución
Etapa 1. Debemos determinar el número de términos de la Progresión aritmética

Etapa 2. Gestión de la información

(i) Como A es una Progresión aritmética entonces la suma de sus términos S_{2n} se computa de acuerdo a la fórmula:

$$S_n = \sum_{i=1}^{2n} a_i = \frac{2n}{2}\left[2a_1 + (2n-1)d\right] = \frac{2n}{2}\left[a_1 + a_{2n}\right]$$

entonces

$$
\begin{aligned}
n\left[a_1 + a_{2n}\right] &= \sum_{i=1}^{2n} a_i\\
&= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + c_{2n}\\
&= (a_1 + a_3 + \cdots + c_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + c_{2n})\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} + \sum_{i=1}^{n} a_{2i}
\end{aligned}
$$

Así que,

$$n\,[2a_1 + a_{2n}] \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} + \sum_{i=1}^{n} a_{2i} \qquad (1)$$

(ii) Pero sabemos que, $\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} = 46$ y $\sum_{i=1}^{n} a_{2i} = 69$, así que sustituyendo en (1) tenemos que:

$$n\,[a_1 + a_{2n}] \quad = \quad 46 + 69 = 115 \qquad (2)$$

(iii) Además tenemos como dato que, $a_1 = \frac{5}{3}$ y $a_{2n} = a_1 + \frac{13}{3}$, así que sustituyendo en (2), obtenemos:

$$\begin{aligned} 115 &= n\,[2a_1 + a_{2n}] \\ &= n\left[\frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{13}{3}\right] \\ &= n\left[\frac{23}{3}\right] \\ &\Downarrow \\ n &= 15 \end{aligned}$$

Etapa 3. Finalmente, $A = \left\{\frac{5}{3}, a_2, a_3, \dots, a_{30}\right\}$

---

(4) Si $(1+2x)(1+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Entonces demuestre que

$$G = \{a_0, a_1, a_2\} \text{ Progresión geométrica } \Longrightarrow n \text{ es par}$$

Solución
Etapa 1. Por demostrar que n es par ó $n = 2s$ para algún $s \in \mathbb{N}$

Etapa 2. Manejo de la información

En primer lugar, por hipótesis sabemos que

$$(1+2x)(1+x^2)^n \quad = \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \qquad (*)$$

En segundo lugar, del desarrollo binomial sigue que

$$\begin{aligned} (1+2x)(1+x^2)^n &= (1+2x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(x^2)^k \\ &= (1+2x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k} + 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{2k+1} \\ &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^4 + \dots\right] + 2\left[\binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^3 + \binom{n}{2}x^5 + \dots\right] \end{aligned}$$

Así que, de este cálculo concluimos que

$$(1+2x)(1+x^2)^n \quad = \quad \binom{n}{0} + 2\binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^2 + 2\binom{n}{1}x^3 + \binom{n}{2}x^4 + 2\binom{n}{2}x^5 + \dots \qquad (**)$$

En tercer lugar, de la comparación de $(*)$ y $(**)$, sigue que

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{0}x + \binom{n}{1}x^2 + 2\binom{n}{1}x^3 + \binom{n}{2}x^4 + 2\binom{n}{2}x^5 + \dots \quad = \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

De donde, se obtiene que

$$a_0 = \binom{n}{0} = 1 \wedge a_1 = 2\binom{n}{0} = 2 \wedge a_2 = \binom{n}{1} = n$$

En cuarto lugar, $G = \{a_0, a_1, a_2\}$ es una Progresión geométrica $\Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{a_2}{a_1}$. Así que

$$\frac{2}{1} = \frac{n}{2} \Longrightarrow n = 4$$