Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución de la Prueba Acumulativa Semestral de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
30 de Agosto del 2006

(1) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{i-1} & : \text{ si } i = j \\ i - j & : \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left[\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n - 2^n}{(\sqrt{2} - 2)} \right]$$

Solución

Etapa 1. Debemos demostrar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left[\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n - 2^n}{(\sqrt{2} - 2)} \right]$

Etapa 2. Gestión de la información

(i) $a_{ii} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{i-1}$ para $(\leq i \leq n) \Longrightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 & \\ a_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2} & = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_{33} = \frac{1}{2} & = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_{44} = \frac{\sqrt{2}}{4} & = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_{55} = \frac{1}{4} & = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} & = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

(ii) Luego $G = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ es una progresión geométrica con primer término $a_{11} = 1$ y razón $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Así que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} &= 1 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = \frac{\frac{(\sqrt{2})^n}{2^n} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} \\ &= \frac{\frac{(\sqrt{2})^n - 2^n}{2^n}}{\frac{\sqrt{2} - 2}{2}} = \frac{(\sqrt{2})^n - 2^n}{2^{n-1}(\sqrt{2} - 2)} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left[\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n - 2^n}{(\sqrt{2} - 2)} \right] \end{aligned}$$

(2) Determine, si es que existen, en el desarrollo binomial $(3x+2)^{19}$, dos términos consecutivos cuyos coeficientes sean iguales.

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Solución

Etapa 1. Debemos determinar dos términos consecutivos cuyos coeficientes sean iguales

Etapa 2. Gestión de la información.

(a) Sean t_k y t_{k+1} los términos consecutivos entonces

$$\begin{aligned} t_k &= \binom{19}{k-1}(3x)^{19-(k-1)} \cdot 2^{k-1} \\ &= \binom{19}{k-1}3^{20-k}x^{20-k} \cdot 2^{k-1} \\ &= \binom{19}{k-1}3^{20-k} \cdot 2^{k-1} \cdot x^{20-k} \end{aligned}$$

Y,

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= \binom{19}{k}(3x)^{19-k)} \cdot 2^{k} \\ &= \binom{19}{k}3^{19-k}x^{19-k} \cdot 2^{k} \\ &= \binom{19}{k}3^{19-k} \cdot 2^{k} \cdot x^{19-k} \end{aligned}$$

(b) Ahora igualando los coeficientes de t_k y t_{k+1} tenemos que

$$\begin{aligned} \binom{19}{k-1}3^{20-k} \cdot 2^{k-1} &= \binom{19}{k}3^{19-k} \cdot 2^{k} \\ &\Updownarrow \\ \frac{19!}{(k-1)!(20-k)!} \cdot 3^{20-k} \cdot 2^{k-1} &= \frac{19!}{k!(19-k)!} \cdot 3^{19-k} \cdot 2^{k} \\ &\Updownarrow \\ \frac{1}{(k-1)!(20-k)!} \cdot 3 &= \frac{1}{k!(19-k)!} \cdot 2 \\ &\Updownarrow \\ \frac{k!}{(k-1)!} \cdot 3 &= \frac{(20-k)!}{(19-k)!} \cdot 2 \\ &\Updownarrow \\ \frac{(k-1)! \cdot k}{(k-1)!} \cdot 3 &= \frac{(19-k)!(20-k)}{(19-k)!} \cdot 2 \\ &\Updownarrow \\ 3k &= 40-2k \\ &\Updownarrow \\ 5k &= 40 \\ &\Downarrow \\ k &= 8 \end{aligned}$$

Así que los términos pedidos son: t_8 y t_9.

(3) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = \lambda\}$. Definamos en $\mathbb{R}^3$ la relación:

$$(a, b, c)\Re\,(a', b', c') \iff (a - a', b - b', c - c') \in \mathbb{W}$$

(a) Determine el conjunto $S = \{\lambda \in \mathbb{R}; \mid \Re \text{ es una relación de equivalencia}\}$

Solución

Etapa 1. Debemos determinar el conjunto S.

Etapa 2. Gestión de la información

Si $\lambda \in S$ entonces $\Re$ es una relación de equivalencia, y por tanto debe suceder lo siguiente:

(i) $\Re$ es una relación refleja, es decir se verifica que: $(a, b, c)\Re(a, b, c) \quad (\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3)$. Pero

$$\begin{aligned}
(a, b, c)\Re(a, b, c) \quad (\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3) &\iff (a - a, b - b, c - c) \in \mathbb{W} \\
&\iff (0, 0, 0) \in \mathbb{W} \\
&\iff 0 + 0 + 2 \cdot 0 = \lambda \\
&\iff \lambda = 0
\end{aligned}$$

Conclusión 1. $\Re$ relación refleja si $\lambda = 0$

(ii) También, $\Re$ es una relación simétrica, es decir se verifica que: $(a, b, c)\Re(d, e, f) \Longrightarrow (d, e, f)\Re(a, b, c)$. Pero entonces por una parte

$$\begin{aligned}
(a, b, c)\Re(d, e, f) &\iff (a - d, b - e, c - f) \in \mathbb{W} \\
&\iff a - d + b - e + 2(c - f) = \lambda \qquad (*)
\end{aligned}$$

Y por otra parte,

$$\begin{aligned}
(d, e, f)\Re(a, b, c) &\iff (d - a, e - b, f - c) \in \mathbb{W} \\
&\iff d - a + e - b + 2(f - c) = \lambda \qquad (**)
\end{aligned}$$

Así que comparando$(*)$ con $(**)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lambda \overset{(*)}{=} a - d + b - e + 2(c - f) &= -(d - a + e - b + 2(f - c)) \overset{(**)}{=} -\lambda \\
&\Downarrow \\
\lambda &= -\lambda \\
&\Downarrow \\
\lambda &= 0
\end{aligned}$$

Conclusión 2. $\Re$ relación simétrica si $\lambda = 0$

(iii) Finalmente, también $\Re$ es una relación transitiva, es decir se verifica que:

$$(a, b, c)\Re(d, e, f) \wedge (d, e, f)\Re(g, h, i) \Longrightarrow (a, b, c)\Re(g, h, i)$$

Entonces

$$\begin{aligned}(a,b,c)\Re(d,e,f) &\iff (a-d,b-e,c-f)\in\mathbb{W}\\ &\iff a-d+b-e+2(c-f)=\lambda \qquad (*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d,e,f)\Re(g,h,i) &\iff (d-g,e-h,f-i)\in\mathbb{W}\\ &\iff d-g+e-h+2(f-i)=\lambda \qquad (**)\end{aligned}$$

Por la transitividad de $\Re$ tenemos que

$$\begin{aligned}(a,b,c)\Re(g,h,i) &\iff (a-g,b-h,c-i)\in\mathbb{W}\\ &\iff a-g+b-h+2(c-i)=\lambda \qquad (***)\end{aligned}$$

De $(*)$ y $(**)$ sigue

$$\begin{aligned}a-d+b-e+2(c-f)+d-g+e-h+2(f-i) &= \lambda+\lambda\\ &\Downarrow\\ a-g+b-h+2(c-i) &= 2\lambda \qquad (****)\end{aligned}$$

Así que de $(***)$ y $(****)$ sigue que $\lambda=2\lambda$, luego, $\lambda=0$

Conclusión 3. $\Re$ relación transitiva si $\lambda=0$

Finalmente, $S=\{0\}$

(b) Demuestre que para $\lambda\in S$ tenemos que $\overline{(0,0,0)}=\mathbb{W}$

Solución

$$\begin{aligned}(a,b,c)\in\overline{(0,0,0)} &\iff (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\wedge(a,b,c)\Re(0,0,0)\\ &\iff (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\wedge(a-0,b-0,c-0)\in\mathbb{W}\\ &\iff (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\wedge(a,b,c)\in\mathbb{W}\end{aligned}$$

(4) Sea $h:\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\longmapsto\mathbb{R}_3[x]$ tal que $h\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=a+(a+b-d)x+(b-c+d)x^2+(a-b)x^3$.

(a) Demuestre que h es un isomorfismo de grupos

Solución

Etapa 1. P.d.q. h es un homomorfismo de grupos, es decir, Si $A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces p.d.q. $h(A+B)=H(A)+H(B)$.

En efecto

$$\begin{array}{rcl} A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) & \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) & \Longleftrightarrow & B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ & \Downarrow & \\ A + B & = & \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Así que

$$\begin{aligned} h(A+B) &= h\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{11} + b_{11} + a_{12} + b_{12} - (a_{22} + b_{22}))x + (a_{12} + b_{12} - (a_{21} + b_{21}) + (a_{22} + b_{22}))x^2 + \\ &\quad (a_{11} + b_{11} - (a_{12} + b_{12}))x^3 \\ &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{11} + a_{12} - a_{22} + b_{11} + b_{12} - b_{22})x + (a_{12} - a_{21} + a_{22} + b_{12} - b_{21} + b_{22})x^2 + \\ &\quad (a_{11} - a_{12} + b_{11} - b_{12})x^3 \\ &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{11} + a_{12} - a_{22})x + (b_{11} + b_{12} - b_{22})x + (a_{12} - a_{21} + a_{22})x^2 + (b_{12} - b_{21} + b_{22})x^2 + \\ &\quad (a_{11} - a_{12})x^3 + (b_{11} - b_{12})x^3 \\ &= a_{11} + (a_{11} + a_{12} - a_{22})x + (a_{12} - a_{21} + a_{22})x^2 + (a_{11} - a_{12})x^3 + b_{11} + (b_{11} + b_{12} - b_{22})x + \\ &\quad (b_{12} - b_{21} + b_{22})x^2 + (b_{11} - b_{12})x^3 \\ &= h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= h(A) + h(B) \end{aligned}$$

Luego, h es un homomorfismo de grupos.

Etapa 2. P.d.q. h es inyectiva, es decir, p.d.q. $\ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

En efecto

$$\begin{aligned} A \in \ker(h) &\Longleftrightarrow A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h(A) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \\ &\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge h\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\ &\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{11} + (a_{11} + a_{12} - a_{22})x + (a_{12} - a_{21} + a_{22})x^2 + \\ &\quad (a_{11} - a_{12})x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\ &\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{array}{lcl|l} a_{11} & = & 0 & (1) \\ a_{11} + a_{12} - a_{22} & = & 0 & (2) \\ a_{12} - a_{21} + a_{22} & = & 0 & (3) \\ a_{11} - a_{12} & = & 0 & (4) \\ \hline \end{array} \\ &\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad a_{11} \overset{(1)}{=} 0 \quad \wedge \quad a_{12} \overset{(4)}{=} 0 \quad \wedge \quad a_{22} \overset{(2)}{=} 0 \quad \wedge \quad a_{21} \overset{(3)}{=} 0 \\ &\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, $\ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y h es inyectiva

Etapa 3. P.d.q. h es sobreyectiva, es decir, p.d.q. Para cada $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ Existe $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $h(A) = p(x)$

En efecto

$$\begin{array}{rcl} h\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} & = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ & \Updownarrow & \\ y_{11} + (y_{11} + y_{12} - y_{22})x + (y_{12} - y_{21} + y_{22})x^2 + (y_{11} - y_{12})x^3 & = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \end{array}$$

Luego,

$$h\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \iff \begin{array}{rcl|l} y_{11} & = & a_0 & (1) \\ y_{11} + y_{12} - y_{22} & = & a_1 & (2) \\ y_{12} - y_{21} + y_{22} & = & a_2 & (3) \\ y_{11} - y_{12} & = & a_3 & (4) \\ \hline \end{array}$$

$$\Longrightarrow y_{11} \overset{(1)}{=} a_0 \wedge y_{12} \overset{(4)}{=} a_0 - a_3 \wedge y_{22} \overset{(2)}{=} 2a_0 - a_3 - a_1 \wedge y_{21} \overset{(3)}{=} 3a_0 - 2a_3 - a_1 - a_2$$

Así que

$$h\begin{pmatrix} a_0 & (a_0 - a_3) \\ (3a_0 - 2a_3 - a_1 - a_2) & (2a_0 - a_3 - a_1) \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \text{ y } h \text{ es sobreyectiva}$$

(b) Determine h^{-1}
Solución
Como h es biyectiva por el ejercicio anterior entonces basta definir

$$h^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 & (a_0 - a_3) \\ (3a_0 - 2a_3 - a_1 - a_2) & (2a_0 - a_3 - a_1) \end{pmatrix}$$

En efecto

$$\begin{array}{rcl} (h \circ h^{-1})(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) & = & h\left(h^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\right) \\ & = & h\begin{pmatrix} a_0 & (a_0 - a_3) \\ (3a_0 - 2a_3 - a_1 - a_2) & (2a_0 - a_3 - a_1) \end{pmatrix} \\ & = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ & \Downarrow & \\ (h \circ h^{-1}) & = & 1_{\mathbb{R}_3[x]} \end{array}$$

Análogamente

$$\begin{array}{rcl} (h^{-1} \circ h)\begin{pmatrix} a_{11} & (a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & = & h^{-1}\left[h\begin{pmatrix} a_{11} & (a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right] \\ & = & h^{-1}[a_{11} + (a_{11} + a_{12} - a_{22})x + (a_{12} - a_{21} + a_{22})x^2 + (a_{11} - a_{12})x^3] \\ & = & \begin{pmatrix} a_{11} & (a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ & \Downarrow & \\ h^{-1} \circ h & = & 1_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \end{array}$$