Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Solución del Examen de Álgebra[1]
20 de Diciembre de 2006
Profesor Ricardo Santander Baeza

(1) Demuestre que

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n=\begin{cases} 2 & : \text{Si } n \text{ es múltiplo de } 3\\ -1 & : \text{Si } n \text{ no es múltiplo de } 3\end{cases}$$

Solución

Etapa 1. Si escribimos $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ en forma trigonométrica debemos tener que:

$$z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=|z|(\cos\alpha+i\text{sen }\alpha)\qquad (*)$$

Pero como,

- $|z|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=1$, y
- $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\alpha+i\text{sen }\alpha\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl}\cos\alpha&=&-\frac{1}{2}\\ \text{sen }\alpha&=&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right|\Longrightarrow \alpha=120^{\text{o}}$

Entonces sustituyendo en $(*)$, tenemos que

$$z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\cos 120+i\text{sen }120\ \wedge\ \bar z=\overline{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}=\overline{\cos 120+i\text{sen }120}=\cos 120-i\text{sen }120$$

Etapa 2. Aplicamos la fórmula de De Moivre y conseguimos que,

$$\begin{array}{rcl} z^n&=&\cos 120n+i\text{sen }120n\\ \bar z^n&=&\cos 120n-i\text{sen }120n\end{array}$$

Etapa 3. Finalmente,

$$\begin{array}{rcl} z^n+\bar z^n&=&\cos 120n+i\text{sen }120n+\cos 120n-i\text{sen }120n\\ &=&2\cos 120n\qquad\qquad (**)\end{array}$$

Y como al dividir n por 3 tenemos que $n=3s$ o $n=3s+1$ o $n=3s+2$ entonces tenemos tres casos para sustituir en $(**)$:

Caso 1. $n=3s\Longrightarrow z^n+\bar z^n=2\cos 120\cdot 3s=2\cos 360s=2$

Caso 2. $n=3s+1\Longrightarrow z^n+\bar z^n=2\cos 120\cdot(3s+1)=2\cos(360s+120)=2\cos 120=-1$

Caso 3. $n=3s+2\Longrightarrow z^n+\bar z^n=2\cos 120\cdot(3s+2)=2\cos(360s+240)=2\cos 240=-1$

[1]Cada problema vale 1,5 puntos
Tiempo 120 '

(2) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{S}_1 & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (*) \text{ tiene solución única}\} \\ \mathbb{S}_2 & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\} \\ \mathbb{S}_3 & = & \{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid (*) \text{ No tiene solución}\} \end{array}$$

Solución

Etapa 1. Si notamos $(A|B)$ a la matriz ampliada asociada al sistema $(*)$ entonces tenemos que

$$(A|B) \quad = \quad \begin{pmatrix} a & b & 1 & |1 \\ 1 & ab & 1 & |b \\ 1 & b & a & |1 \end{pmatrix}$$

Etapa 2. Realizando operaciones elementales en $(A|B)$ para $a \neq 0$ tenemos que:

$$(A|B) \quad \approx \quad \begin{pmatrix} a & b & 1 & | & 1 \\ 0 & b(a^2-1) & a-1 & | & ab-1 \\ 0 & b(a+2)(a-1) & 0 & | & ab+b-2 \end{pmatrix}$$

Etapa 3. Ahora procedemos al estudio de la existencia de soluciones de $(*)$, aplicando el teorema del rango.

Caso 1. Si $b(a+2)(a-1)=0$ entonces sucede que $b=0 \vee a+2=0 \vee a-1=0$.

Luego, tenemos las posibilidades:

- $b=0 \Longrightarrow (A|B) \approx \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (a,0)\in\mathbb{S}_3$, pues, $\rho(A|B)\neq\rho(A)$
- $a=-2 \Longrightarrow (A|B) \approx \begin{pmatrix} -2 & b & 1 & | & 1 \\ 0 & 3b & -3 & | & -2b-1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -b-2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } b=-2 \text{ entonces } (-2,-2)\in\mathbb{S}_2 \\ \text{Si } b\neq -2 \text{ entonces } (-2,b)\in\mathbb{S}_3 \end{cases}$
- $a=1 \Longrightarrow (A|B) \approx \begin{pmatrix} 1 & b & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2b-2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } b=1 \text{ entonces } (1,1)\in\mathbb{S}_2 \\ \text{Si } b\neq 1 \text{ entonces } (1,b)\in\mathbb{S}_3 \end{cases}$

Caso 2. Si $b(a+2)(a-1)\neq 0$ entonces sucede lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(A|B) \quad &\approx \quad \left(\begin{array}{ccccc} a & b & 1 & | & 1 \\ 0 & b(a^2-1) & a-1 & | & ab-1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \end{array}\right) \\
&\approx \quad \left(\begin{array}{ccccc} a & b & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & b(a^2-1) & a-1 & | & ab-1 \end{array}\right) \\
&\approx \quad \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & 1 & | & 1-\dfrac{ab+b-2}{(a+2)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & 0 & a-1 & | & (ab-1)-(a+1)\dfrac{ab+b-2}{a+2} \end{array}\right) \\
&\approx \quad \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & 1 & | & \dfrac{(a-b)(a+1)}{(a+2)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & 0 & a-1 & | & \dfrac{a-b}{a+2} \end{array}\right) \\
&\approx \quad \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & 1 & | & \dfrac{(a-b)(a+1)}{(a+2)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & | & \dfrac{a-b}{(a+2)(a-1)} \end{array}\right) \\
&\approx \quad \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & 0 & | & \dfrac{a(a-b)}{(a+2)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & | & \dfrac{a-b}{(a+2)(a-1)} \end{array}\right) \\
&\approx \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & | & \dfrac{(a-b)}{(a+2)(a-1)} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{ab+b-2}{b(a+2)(a-1)} \\ 0 & 0 & 1 & | & \dfrac{a-b}{(a+2)(a-1)} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Y en estas condiciones $(a,b) \in \mathbb{S}_1$

Si $a = 0$ entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
(A|B) \quad &= \quad \left(\begin{array}{cccc} 0 & b & 1 & |1 \\ 1 & 0 & 1 & |b \\ 1 & b & 0 & |1 \end{array}\right) \\
&\approx \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & | & b \\ 0 & b & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -b \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Si $b = 0$ entonces

$$(A|B) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Y entonces $(0,0) \in \mathbb{S}_3$

Si $b \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} (A|B) &\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -b \end{array}\right) \\ &\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-b}{2b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Y, $(0,b) \in \mathbb{S}_1$

(3) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$

(a) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{c(3)}^{c(3)} = A$
Solución

Debemos construir $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_{c(3)}^{c(3)} = A$

Por definición $c(3) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, y

$A = [T]_{c(3)}^{c(3)} = \left([T(1,0,0)]_{c(3)}\ [T(0,1,0)]_{c(3)}\ [T(0,0,1)]_{c(3)}\right)$ entonces

$$\left([T(1,0,0)]_{c(3)} \quad [T(0,1,0)]_{c(3)} \quad [T(0,0,1)]_{c(3)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Así que,

$$\begin{aligned} [T(1,0,0)]_{c(3)} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow\quad & T(1,0,0) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) = (2,1,1) \\ [T(0,1,0)]_{c(3)} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow\quad & T(1,0,0) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 2(0,0,1) = (2,3,2) \\ [T(0,0,1)]_{c(3)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow\quad & T(1,0,0) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 3(0,0,1) = (0,1,3) \end{aligned}$$

Como $c(3)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ entonces se verifica que

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

Así que, si queremos construir $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ en las condiciones de encima entonces forzosamente debemos definir T, como sigue

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1) \\ &= x(2,1,1)+y(2,3,2)+z(0,1,3) \\ &= (2x+2y, x+3y+z, x+2y+3z) \end{aligned}$$

Es decir el operador lineal pedido es

$$T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3 \ : \ T(x,y,z) \quad = \quad (2x+2y, x+3y+z, x+2y+3z)$$

(b) Decida si la transformación T obtenida en la pregunta anterior es diagonalizable.

Solución

Como $[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $P_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} (\lambda-2) & -2 & 0 \\ -1 & (\lambda-3) & -1 \\ -1 & -2 & (\lambda-3) \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-5)$

Luego,

$$V.P \quad = \quad \{1,2,5\}$$

Todos de multiplicidad algebraica 1 entonces T es diagonalizable

(c) Si la transformación T resulta ser diagonalizable, determine una base de vectores propios de T.

Solución

En general un algoritmo de cálculo es el siguiente:

$$\begin{aligned} u \in (\mathbb{R}^3)_\lambda &\iff u \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ T(u) = \lambda u \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ T(x,y,z) = \lambda(x,y,z) \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ (2x+2y, x+3y+z, x+2y+3z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} 2x+2y & = & \lambda x \\ x+3y+z & = & \lambda y \\ x+2y+3z & = & \lambda z \end{array}\right| \qquad (*) \end{aligned}$$

Caso 1. Si $\lambda = 1$ entonces sustituyendo en $(*)$ tenemos que

$$\begin{aligned} u \in (\mathbb{R}^3)_1 &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} 2x+2y & = & x \\ x+3y+z & = & y \\ x+2y+3z & = & z \end{array}\right| \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} x+2y & = & 0 \\ x+2y+z & = & 0 \\ x+2y+2z & = & 0 \end{array}\right| \\ &\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ [z = 0 \wedge x = -2y] \\ &\iff u = (-2y, y, 0), y \in \mathbb{R} \\ &\iff u = y(-2,1,0), y \in \mathbb{R} \\ &\iff u = \langle\{(-2,1,0)\}\rangle \end{aligned}$$

Así que,

$$(\mathbb{R}^3)_1 \quad = \quad \langle\{(-2,1,0)\}\rangle$$

Caso 2. Si $\lambda = 2$ entonces sustituyendo en $(*)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{R}^3)_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} 2x + 2y & = & 2x \\ x + 3y + z & = & 2y \\ x + 2y + 3z & = & 2z \end{array}\right| \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} 2y & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \end{array}\right| \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ [y = 0 \wedge x = -z] \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (-z,0,z), z \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad u = z(-1,0,1), z \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad u = \langle\{(-1,0,1)\}\rangle
\end{aligned}$$

Así que,

$$(\mathbb{R}^3)_2 \quad = \quad \langle\{(-1,0,1)\}\rangle$$

Caso 3. Si $\lambda = 5$ entonces sustituyendo en $(*)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{R}^3)_5 \quad &\Longleftrightarrow \quad u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} 2x + 2y & = & 5x \\ x + 3y + z & = & 5y \\ x + 2y + 3z & = & 5z \end{array}\right| \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left.\begin{array}{lcl} -3x + 2y & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \\ x + 2y - 2z & = & 0 \end{array}\right| \\
&\Longleftrightarrow \quad u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ \left[y = \frac{3}{2}x \wedge 2x = z\right] \\
&\Longleftrightarrow \quad u = \left(x, \frac{3}{2}x, 2x\right), x \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad u = x\left(1, \frac{3}{2}, 2\right), x \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad u = \left\langle\left\{\left(1, \frac{3}{2}, 2\right)\right\}\right\rangle
\end{aligned}$$

Así que,

$$(\mathbb{R}^3)_5 \quad = \quad \left\langle\left\{\left(1, \frac{3}{2}, 2\right)\right\}\right\rangle = \langle\{(2,3,4)\}\rangle$$

Así que podemos formar el conjunto $\alpha = \{(-2,1,0),(-1,0,1),(2,3,4)\} \subset \mathbb{R}^3$, tenemos al menos dos razones para concluir que α es una base de vectores propios, por ejemplo:

Vectores propios de subespacios propios diferentes son linealmente independientes y como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$ entonces también es un sistema de generadores para $\mathbb{R}^3$

O bien,

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 6 & 3 & 0\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -2 & 1\\ 6 & 3\end{pmatrix} = 12 \neq 0$$

Y entonces α es linealmente independiente, y podemos repetir el argumento de encima.

(4) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tal que $T((x,\, y,\, z,\, w)) = (x - z + w,\, y + w,\, -2x + 2z - 2w,\, 2y + 2w)$

(a) ¿ Es T un isomorfismo ?. Justifique su respuesta

Solución

Si $c(4)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ entonces

$$[T]_{c(4)}^{(c(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Luego,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix} = 0$$

Así que, T no es un isomorfismo.

(b) ¿ Es T diagonalizable ?. Justifique su respuesta

Solución

Usando la información obtenida en el punto anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned}
P_T(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0 & 1 & -1\\ 0 & (\lambda-1) & 0 & -1\\ 2 & 0 & (\lambda-2) & 2\\ 0 & -2 & 0 & (\lambda-2)\end{pmatrix}\\
&= (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0 & -1\\ 0 & (\lambda-2) & 2\\ -2 & 0 & (\lambda-2)\end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ (\lambda-1) & 0 & -1\\ -2 & 0 & (\lambda-2)\end{pmatrix}\\
&= (\lambda-1)^2\det\begin{pmatrix} (\lambda-2) & 2\\ 0 & (\lambda-2)\end{pmatrix} - (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 0 & (\lambda-2)\\ -2 & 0\end{pmatrix} -\\
&\quad 2\det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & -1\\ -2 & (\lambda-2)\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0\\ -2 & 0)\end{pmatrix}\\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2 - 2(\lambda-1)(\lambda-2) - 2(\lambda-1)(\lambda-2) + 4\\
&= [(\lambda-1)(\lambda-2) - 2]^2\\
&= (\lambda(\lambda-3))^2
\end{aligned}$$

Ahora, si llamamos $m_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)$ entonces

$$\begin{aligned}
m_T([T]_{c(4)}^{(c(4)}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto T no es diagonalizable.