**Universidad de Santiago de Chile**
**Departamento de Matemática y C.C.**

**Solución Pep N° 4 de Álgebra**[1]
**Ingeniería Civil**
**Profesor Ricardo Santander Baeza**
**28 de Diciembre del 2005**

(1) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

- $(\mathbb{R}_2[x])_3 = \left\{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a_0 + a_1 - a_2 = 0\right\}$
- $T$ no es un isomorfismo

Solución

Etapa 1. Debemos determinar $T(p(x)) = T(a_0 + a_1x + a_2x^2) \quad (\forall p(x); p(x) \in \mathbb{R}_2[x])$

Etapa 2. Información

(i) Por una parte,

$$\begin{aligned} p(x) \in (\mathbb{R}_2[x])_3 &\iff p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(p(x)) = 3p(x) \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 3(a_0 + a_1x + a_2x^2) \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 3a_0 + 3a_1x + 3a_2x^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

(ii) Por otra parte,

$$\begin{aligned} p(x) \in (\mathbb{R}_2[x])_3 &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge a_0 + a_1 - a_2 = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge a_0 + a_1 = a_2 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + (a_0 + a_1)x^2 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_0x^2 + a_1x^2 \\ &\iff p(x) = a_0(1 + x^2) + a_1(x + x^2) \\ &\Downarrow \\ (\mathbb{R}_2[x])_3 &= \langle\{1 + x^2, x + x^2\}\rangle \\ &\Downarrow \\ \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])_3 &\leq 2 \end{aligned}$$

Pero, $\alpha = \{1 + x^2, x + x^2\}$ es linealmente independiente.

En efecto

$$\begin{aligned} a(1 + x^2) + b(x + x^2) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} &\implies a + bx + (a + b)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ &\implies a = 0 \wedge b = 0 \wedge a + b = 0 \end{aligned}$$

Así que, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])_3 = 2$ y $\alpha = \{1 + x^2, x + x^2\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[x])_3$

Luego, aplicando la información (1) a la base $\alpha$ tenemos que

$$\begin{aligned} T(1 + x^2) &= 3 + 3x^2 \qquad (2) \\ T(x + x^2) &= 3x + 3x^2 \qquad (3) \end{aligned}$$

(iii) Completamos a partir de $\alpha$ una base de $\mathbb{R}_2[x]$, para que además verifique la condición de no ser un isomorfismo

Define $\beta = \{1, 1 + x^2, x + x^2\}$, y $\beta$ así construido es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

En efecto

$$\begin{aligned} c_1\cdot 1 + c_2(1+x^2)+c_3(x+x^2)=0_{\mathbb{R}_2[x]} &\Longrightarrow (c_1+c_2)\cdot 1 + c_3x + (c_2+c_3)x^2 = 0+0x+0x^2\\ &\Longrightarrow c_1+c_2=0 \wedge c_3=0 \wedge c_2+c_3=0\\ &\Longrightarrow c_1=c_2=c_3=0 \end{aligned}$$

Luego, $\beta=\{1, 1+x^2, x+x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(iv) Finalmente construimos $T$.

Partimos Definiendo lo que falta

$$\begin{array}{lcl} T(1) & = & 0+0x+0x^2 \qquad (T \text{ no debe ser inyectiva, usando el Teorema de la dimensión})\\ T(1+x^2) & = & 3+3x^2\\ T(x+x^2) & = & 3x+3x^2 \end{array}$$

Ahora determinamos las coordenadas de $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ en la base $\beta$

$$\begin{array}{rcl} a_0+a_1x+a_2x^2 & = & d_1+d_2(1+x^2)+d_3(x+x^2)\\ & = & (d_1+d_2)+d_3x+(d_2+d_3)x^2\\ & \Longrightarrow & \left.\begin{array}{rcl} d_1+d_2 & = & a_0\\ d_3 & = & a_1\\ d_2+d_3 & = & a_2 \end{array}\right| \Longrightarrow d_3=a_1 \wedge d_2=a_2-a_1 \wedge d_1=a_0-a_2+a_1 \end{array}$$

Por tanto

$$\begin{array}{rcl} a_0+a_1x+a_2x^2 & = & (a_0-a_2+a_1)+(a_2-a_1)(1+x^2)+a_1(x+x^2)\\ & \Downarrow & \\ T(a_0+a_1x+a_2x^2) & = & T[(a_0-a_2+a_1)+(a_2-a_1)(1+x^2)+a_1(x+x^2)]\\ & = & (a_0-a_2+a_1)T(1)+(a_2-a_1)T(1+x^2)+a_1T(x+x^2)\\ & = & (a_2-a_1)(3+3x^2)+a_1(3x+3x^2)\\ & = & 3(a_2-a_1)+3a_2x^2-3a_1x^2+3a_1x+3a_1x^2\\ & = & 3(a_2-a_1)+3a_1x+3a_2x^2 \end{array}$$

Comprobamos nuestros resultados

$$\begin{cases} T(1) & = T(1+0x+0x^2)=3(0-0)+3\cdot 0\cdot x+3\cdot 0\cdot x^2 = 0+0x+0x^2\\ T(1+x^2) & = T(1+0x+1x^2)=3(1-0)+3\cdot 0\cdot x+3\cdot 1\cdot x^2 = 3+0x+x^2\\ T(x+x^2) & = T(0+1x+1x^2)=3(1-0)+3\cdot 0\cdot x+3\cdot 1\cdot x^2 = 3+0x+x^2 \end{cases}$$

Luego la transformación pedida es

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2) \quad = \quad 3(a_2-a_1)+3a_1x+3a_2x^2$$

---

(2) Sea $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 2)),\mathbb{R}^2)$ tal que $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\end{pmatrix}=(a_{11}+a_{12}, a_{11}-a_{12})$

Si además, $[T]_\alpha^\beta=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, donde

$\alpha=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(1\times 2))$ entonces determine la base $\beta$

Solución

Etapa 1. Sea $\beta = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ la base de $\mathbb{R}^2$ pedida.

Etapa 2. Información

(i) Por hipótesis

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_\mathbb{R}(2) \qquad (1)$$

(ii) Por definición

$$[T]_\alpha^\beta = \left( \left[T\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\right]_\beta, \left[T\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_\beta \right) \qquad (2)$$

Así que de (1) y (2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\left[T\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &\iff T\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\
&\iff (2, 0) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\
&\iff \left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 &=& 2 \\ y_1 - y_2 &=& 0 \end{array}\right| \qquad (*)
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
\left[T\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} &\iff T\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = -(x_1, y_1) + 2(x_2, y_2) = (-x_1 + 2x_2, -y_1 + 2y_2) \\
&\iff (0, 2) = (-x_1 + 2x_2, -y_1 + 2y_2) \\
&\iff \left.\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 &=& 0 \\ -y_1 + 2y_2 &=& 2 \end{array}\right| \qquad (**)
\end{aligned}$$

Etapa 3. Resolvemos los sistemas $(*)$ y $(**)$.

$$\begin{aligned}
\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 &=& 2 \\ y_1 - y_2 &=& 0 \end{array}\right| \wedge \left.\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 &=& 0 \\ -y_1 + 2y_2 &=& 2 \end{array}\right| &\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcl} x_1 &-& x_2 &=& 2 \\ -x_1 &+& 2x_2 &=& 0 \end{array}\right| \wedge \left.\begin{array}{rcrcl} y_1 &-& y_2 &=& 0 \\ -y_1 &+& 2y_2 &=& 2 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow [x_1 = 4 \wedge x_2 = 2] \wedge [y_1 = 2 \wedge y_2 = 2]
\end{aligned}$$

Así que, $\beta = \{(4, 2), (2, 2)\}$ es la base de $\mathbb{R}^2$ pedida.

---

(3) Sea $T \in \mathbb{L}_\mathbb{R}(\mathbb{M}_\mathbb{R}(3 \times 1))$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ y - z \\ -z \end{pmatrix}$.

3.1 Demuestre que $T$ es diagonalizable

Solución

Etapa 1. Determinamos el polinomio característico $P_T(\lambda)$

(i) $[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donde en este caso $c(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(ii) Entonces el polinomio característico es del tipo

$$P_T(\lambda) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0 & -2 \\ 0 & (\lambda-1) & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Así que los valores propios son $V.P = \{1, -1\}$

Etapa 2. Aplicamos un criterio para decidir, si $T$ es diagonalizable o no.

Si $m_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)$ entonces

$$\begin{aligned} m_T([T]_{c(3)}^{c(3)}) &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que $T$ es diagonalizable.

3.2 Determine una base $\alpha$ de vectores propios y $[T]_\alpha^\alpha$

Solución

En general

$$\begin{aligned} A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_\lambda \quad &\Longleftrightarrow \quad A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \;\wedge\; T(A) = \lambda A \\ &\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x+2z \\ y-z \\ -z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcl} x+2z &=& \lambda x \\ y-z &=& \lambda y \\ -z &=& \lambda z \end{array}\right| \qquad (*) \end{aligned}$$

Caso 1. $\lambda = 1$. De $(*)$ sigue que

$$\begin{aligned} A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \;\wedge\; T(A) = A \\ &\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{rcl} x+2z &=& x \\ y-z &=& y \\ -z &=& z \end{array}\right| \\ &\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge z = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad A = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Caso 2. Caso 2. $\lambda = -1$. De $(*)$ sigue que

$$
\begin{aligned}
A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad A \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \ \wedge \ T(A) = -A \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ \left.\begin{array}{rcr} x+2z &=& -x \\ y-z &=& -y \\ -z &=& -z \end{array}\right| \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \ \wedge \ x = -z \wedge y = \frac{1}{2}z \\
&\Longleftrightarrow \quad A = z \begin{pmatrix} -1\\ \frac{1}{2}\\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego, $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{-1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1\\ \frac{1}{2}\\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Finalmente la base pedida es

$$
\alpha \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ \frac{1}{2}\\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \ \ [T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

---

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$, y $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$. Si $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \{0_{\mathbb{V}}\}$ entonces demuestre que

$$
\left[ \langle v_i, v_j \rangle = 0 : \ \text{Para } i \neq j \quad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{pmatrix} \right] \Longrightarrow \alpha \text{ es una base de } \mathbb{V}
$$

Solución

Etapa 1. Mostremos que $\alpha$ es linealmente independiente.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0_{\mathbb{V}} \quad &\Longrightarrow \quad \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, v_j \right\rangle = \langle 0_{\mathbb{V}}, v_j \rangle \qquad (1 \leq j \leq n) \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i, v_j \rangle = 0 \qquad (\text{Propiedades de } \langle , \rangle) \\
&\Longrightarrow \quad a_i \langle v_i, v_i \rangle = 0 \qquad (\text{ Por hipótesis y para } 1 \leq i \leq n) \\
&\Longrightarrow \quad a_i = 0 \qquad ( \ (\text{Pues } \langle v_i, v_i \rangle \neq 0 \quad 1 \leq i \leq n)
\end{aligned}
$$

así que $\alpha$ es linealmente independiente en $\mathbb{V}$.

Etapa 2. Como $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ y $\alpha$ es linealmente independiente en $\mathbb{V}$ entonces es una base de $\mathbb{V}$