Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep N^o 3 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
9 de Noviembre del 2005

1.1 Considere $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $z \neq \pm i$. Demuestre que

$$|z|^2 = 1 \Longrightarrow \overline{\left(\frac{z}{(1+iz)(1-iz)}\right)} = \frac{z}{(1+iz)(1-iz)}$$

Solución

Etapa 1. P.d.q.

$$\overline{\left(\frac{z}{(1+iz)(1-iz)}\right)} = \frac{z}{(1+iz)(1-iz)} \qquad (*)$$

- Como $\dfrac{z}{(1+iz)(1-iz)} = \dfrac{z}{1+z^2}$ entonces demostrar $(*)$ es equivalente a demostrar que

$$\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{z}{1+z^2} \text{ o bien que } \frac{z}{1+z^2} \in \mathbb{R}$$

Etapa 2. Datos

$(\star)$ Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entonces $|z|^2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 = 1 - y^2$

Etapa 3. Conclusión

$$\begin{aligned}
\frac{z}{1+z^2} &= \frac{x+iy}{1+(x+iy)^2} \\
&= \frac{x+iy}{1+x^2+2ixy-y^2} \qquad \text{(Aplicando } (\star) \text{ nos queda)} \\
&= \frac{x+iy}{2x^2+2ixy} \\
&= \frac{x+iy}{2x(x+iy)} \\
&= \frac{1}{2x} \\
&\Downarrow \\
\frac{z}{1+z^2} &\in \mathbb{R} \\
&\Downarrow \\
\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} &= \frac{z}{1+z^2}
\end{aligned}$$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

1.2 Sea $z \in (\mathbb{C} - \{1\})$ tal que z es una raíz séptima de la unidad, (Es decir, $z \in (R(7) - \{1\})$. Demuestre que

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{1+z^{2j}}{z^j} + 1 = 0$$

En efecto

Etapa 1. P.d.q.

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{1+z^{2j}}{z^j} + 1 = 0$$

Etapa 2. Datos

$$(\star) \;\; z \in (R(7) - \{1\}) \Longleftrightarrow z^7 = 1 \;\wedge\; z \neq 1 \Longrightarrow 0 = \frac{z^7 - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$$

- Etapa 3. Conclusión

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3} \frac{1+z^{2j}}{z^j} &= \frac{1+z^2}{z} + \frac{1+z^4}{z^2} + \frac{1+z^6}{z^3} \\
&= \frac{z^2(1+z^2) + z(1+z^4) + (1+z^6)}{z^3} \\
&= \frac{z^2 + z^4 + z + z^5 + 1 + z^6}{z^3} \\
&= \frac{1 + z + z^2 + z^4 + z^5 + z^6}{z^3} \qquad \text{(De } (\star) \text{ sigue que)} \\
&= \frac{-z^3}{z^3} \\
&= -1 \\
&\Downarrow \\
\sum_{j=1}^{3} \frac{1+z^{2j}}{z^j} + 1 &= 0
\end{aligned}$$

2. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, $X = (x_i) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ y $B = (b_i) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$.

(2.1) Si $Y \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times 1)$ es una solución del sistema $AX = B$ entonces demuestre que $Y = H + P$, donde H es una solución del sistema homogéneo $AX = (0)$, y P es una solución de $AX = B$.

Solución

Como Y es una solución del sistema $AX = B$ entonces el sistema tiene solución, y tenemos dos casos:

Caso 1: $AX = B$ tiene solución única entonces $Y = H + G$, donde $H = (0)$ es solución del sistema homogéneo $AX = (0)$ e Y, es en este caso la solución dada del sistema $AX = B$

Caso 2: $AX = B$ tiene infinitas soluciones entonces sea $Y_0 \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$, otra solución del sistema $AX = B$

$$
\begin{aligned}
A(Y-Y_0) &= AY - AY_0 \\
&= B - B \qquad \text{(ambas son soluciones del sistema } AX = B\text{, es decir lo satisfacen)} \\
&= (0)
\end{aligned}
$$

Así que, $H = Y - Y_0$ es una solución del sistema homogéneo $AX = (0)$, y luego, $Y = H + G$, donde $H = Y - Y_0$ y $G = Y_0$

(2.2) Sea $u_j = (a_{1j} \;\; a_{2j} \;\; a_{3j})^t \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$, para $j = 1, 2, 3$. Demuestre que el rango del sistema homogéneo $AX = 0$ es 3 si y sólo si $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$

Solución

Etapa 1. P.d.q. Rango del sistema homogéneo $AX = (0)$ es 3 si y sólo si $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$.

Etapa 2. Datos

(a) Por definición el sistema homogéneo es de la forma:

$$
AX = (0) \iff \left.\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &=& 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &=& 0 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &=& 0
\end{array}\right|
$$

(b) Por definición de los u_i, para $i = 1, 2, 3$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\left.\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &=& 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &=& 0 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &=& 0
\end{array}\right| &\iff x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = (0)
\end{aligned}
$$

Etapa 3. Conclusión

- Rango del sistema homogéneo $AX = (0)$ es 3 si y sólo si $AX = (0)$ tiene solución única.
- $AX = (0)$ tiene solución única si y sólo si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Así que, Rango del sistema homogéneo $AX = (0)$ es 3 si y sólo si $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$.

(3.1) Sea $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t \wedge Tr(A) = 0\}$, donde $Tr(A)$ es la traza de la matriz A. Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Solución

Etapa 1. P.d.q. $\mathbb{W} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

$$
\begin{aligned}
A \in \mathbb{W} &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A = A^t \wedge Tr(A) = 0\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \wedge Tr\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \wedge a + d = 0\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge b = c \wedge d = -a\\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \wedge a \in \mathbb{R},\;\; b \in \mathbb{R}\\
&\iff A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \wedge a \in \mathbb{R},\;\; b \in \mathbb{R}\\
&\iff A = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \wedge a \in \mathbb{R},\;\; b \in \mathbb{R}\\
&\Downarrow\\
\mathbb{W} &= \left\langle\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle\\
&\Downarrow\\
\mathbb{W} &\leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)
\end{aligned}
$$

(3.2) Sea $\alpha = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

¿Existe una base β de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$?

Solución

La respuesta es no existe una base β de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$. Pues sabemos que $\det[I]_\alpha^\beta \neq 0$ y

$$
\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \overset{(l_4 \longrightarrow l_4 - l_2)}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 0
$$

4. Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del espacio vectorial real $\mathbb{V}$. Define el conjunto $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tal que $w_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-j+1} v_i$, para $1 \leq j \leq n$.
   - Demuestre que β es una base de $\mathbb{V}$.

En efecto

Etapa 1. Análisis del problema

$$w_j = \sum_{i=1}^{n-j+1} v_i; \;\; (j = 1, 2, \dots, n) \iff \begin{array}{ccl} w_1 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \\ w_2 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n-1} & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{2} v_i = v_1 + v_2 \\ w_n & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{1} v_i = v_1 \end{array} \qquad (*)$$

Etapa 2. P.d.q β es una base

(i) P.d.q. β es Linealmente independiente

Supongamos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = 0$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_j w_j = 0_{\mathbb{V}} & \iff \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{n-j+1} v_i\right) = 0_{\mathbb{V}} \\ & \overset{\text{de } (*)}{\Longrightarrow} a_1(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) + a_2(v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}) + \cdots + a_n v_1 = 0_{\mathbb{V}} \\ & \Longrightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n)v_1 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})v_2 + \cdots + (a_1 + a_2)v_{n-1} + a_1 v_n = 0_{\mathbb{V}} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n & = & 0 \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_1 + a_2 & = & 0 \\ a_1 & = & 0 \end{array}\right| \quad (\text{ Pues, } \alpha \text{ es linealmente independiente})$$

$$\Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots a_n = 0$$

$$\Longrightarrow \beta \text{ es linealmente independiente}$$

(ii) P.d.q. β es un sistema de generadores para $\mathbb{V}$

Sea $u \in \mathbb{V}$ entonces como α es un sistema de generadores para $\mathbb{V}$ entonces existen únicos escalares, $a_1, a_2, \dots, a_n$ tal que

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n \qquad (**)$$

Pero, de $(*)$, sigue que

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & w_n \\ v_2 & = & w_{n-1} - w_n \\ & \vdots & \qquad\qquad\qquad (***) \\ v_{n-1} & = & w_2 - w_3 \\ v_n & = & w_1 - w_2 \end{array}$$

Así que sustituyendo $(***)$ en $(**)$ obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} u & = & a_1w_n + a_2(w_{n-1} - w_n) + a_3(w_{n-2} - w_{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(w_2 - w_3) + a_n(w_1 - w_2) \\ & = & (a_1 - a_2)w_n + (a_2 - a_3)w_{n-1} + \cdots + (a_{n-1} - a_n)w_2 + a_nw_1 \\ & = & a_nw_1 + (a_{n-1} - a_n)w_2 + \cdots + (a_2 - a_3)w_{n-1} + (a_1 - a_2)w_n \end{array}$$

Luego, β genera $\mathbb{V}$ y tenemos la importante fórmula

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} a_n \\ (a_{n-1} - a_n) \\ \vdots \\ (a_2 - a_3) \\ (a_1 - a_2) \end{pmatrix} \qquad (****)$$

- Determine $\left[\sum_{i=1}^{n} iv_i\right]_\beta$

  Solución

  Sea $u = v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \cdots + nv_n$ entonces aplicamos $(****)$, para $a_i = i$ con $i = 1, 2, 3, , \ldots, n$.

  Así que

$$\left[\sum_{i=1}^{n} iv_i\right]_\beta = \begin{pmatrix} n \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$