Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep Nº 2 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
10 de Agosto del 2005

(1) Determine el centro y el radio de un círculo (si es posible), que pasa por los puntos $P = (4,2)$, $Q = (1,5)$ y $R = (1+\sqrt{5}, 0)$

Solución

Etapa 1. Sea $C: \ (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, la ecuación canónica del círculo pedido.

Etapa 2. Los puntos están en el círculo si satisfacen la ecuación del círculo. e.e.

$$\begin{aligned}(4,2) \in C &\iff (4-h)^2 + (2-k)^2 = r^2 \\ &\iff 16 - 8h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = r^2 \\ &\iff 20 - 8h + h^2 - 4k + k^2 = r^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1,5) \in C &\iff (1-h)^2 + (5-k)^2 = r^2 \\ &\iff 1 - 2h + h^2 + 25 - 10k + k^2 = r^2 \\ &\iff 26 - 2h + h^2 - 10k + k^2 = r^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{5}, 0) \in C &\iff (1+\sqrt{5}-h)^2 + (0-k)^2 = r^2 \\ &\iff (1+\sqrt{5})^2 - (2+2\sqrt{5})h + h^2 + k^2 = r^2 \\ &\iff 6 + 2\sqrt{5} - (2+2\sqrt{5})h + h^2 + k^2 = r^2 \qquad (3)\end{aligned}$$

Luego igualando (1),(2) y (3) tenemos,

$$20 - 8h + h^2 - 4k + k^2 = 26 - 2h + h^2 - 10k + k^2 \iff -h + k = 1 \qquad (4)$$

$$26 - 2h + h^2 - 10k + k^2 = 6 + 2\sqrt{5} - (2+2\sqrt{5})h + h^2 + k^2 \iff 5k - \sqrt{5}h = 10 - \sqrt{5} \qquad (5)$$

De (4) y (5) sigue que $h = 1$ y $k = 2$. Por tanto sustituyendo en C, tenemos que

$$C: \ (x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2$$

Finalmente de (1), sigue que $20 - 8h + h^2 - 4k + k^2 = r^2 \iff r^2 = 9$

Etapa 3. Finalmente la ecuación pedida es:

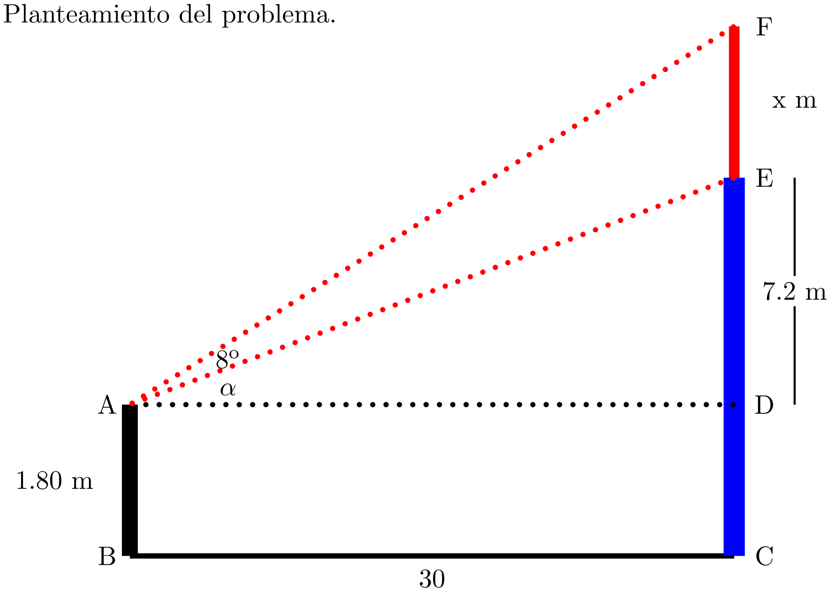
$$C: \ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

(2) Un hombre de 1.80 metros de altura parado a 30 metros de la base de una casa de 9 metros de altura, mira hacia la antena de televisión localizada en el borde del techo. Si el ángulo entre su linea de visibilidad al borde del techo y su linea de visibilidad a la punta superior de la antena es de 8º. ¿Cuál es la longitud de la antena?

Solución

Etapa 1. Planteamiento del problema.



Etapa 2. Datos.

(a) En triángulo rectángulo ADE tenemos que $\tan\alpha = \dfrac{7.2}{30}$. Luego $\alpha = 13.5^{\text{o}}$ aproximadamente.

(b) En triángulo rectángulo ADF tenemos que $\tan 21.5^{\text{o}} = \dfrac{7.2 + x}{30}$.

Luego $x = 30 \cdot \tan 21.5^{\text{o}} - 7.2 = 4,6$ metros aproximadamente

(3) Considere los conjuntos no vacíos: $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ y las funciones $f : A \longmapsto B$ y $g : B \longmapsto A$. Demuestre que:

(a) $[(g \circ f)(a) = a \quad (\forall a; a \in A)] \Longrightarrow f$ inyectiva

En efecto

Etapa 1. P.d.q. la función f es inyectiva. e.e. P.d.q. $f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$

Etapa 2. Datos: $(g \circ f)(a) = a \quad (\forall a; a \in A) \qquad (*)$

Entonces es inmediato que

$$\begin{aligned} f(a_1) = f(a_2) \quad &\Longrightarrow \quad g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ &\Longrightarrow \quad (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \\ &\Longrightarrow \quad a_1 = a_2 \qquad (\text{ Aplicando } (*)) \end{aligned}$$

Así que, la función f es inyectiva.

(b) $[(f \circ g)(b) = b \quad (\forall b; b \in B)] \Longrightarrow f$ sobreyectiva

En efecto

Etapa 1. P.d.q. la función f es sobreyectiva. e.e. P.d.q. $Img(f) = B$

Etapa 2. Datos

(i) Como f es una función bien definida entonces $Img(f) \subset B$. Luego el problema se reduce a mostrar que $B \subset Img(f)$

(ii) $(f \circ g)(b) = b \quad (\forall b; b \in B) \qquad (**)$

Entonces es inmediato que

$$\begin{aligned} b \in B &\Longrightarrow g(b) \in A \qquad (\text{ } g \text{ es una función de } B \text{ en } A) \\ &\Longrightarrow f(g(b)) \in B \\ &\Longrightarrow f(g(b)) = (f \circ g)(b) = b \qquad (\text{ Aplicando } (**)) \\ &\Longrightarrow b \in Img(f) \end{aligned}$$

Luego, $B \subset Img(f)$, y por tanto f sobreyectiva.

(4) Considere los grupos $(\mathbb{R}^3, +)$ y $(\mathbb{S}, +)$, donde $\mathbb{S} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\}$. Define la función.

$$h : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{S} \text{ tal que } h(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + z & 5y \\ 5y & x - z \end{pmatrix}$$

(a) Demuestre que h es un isomorfismo de grupos

Solución

Etapa 1. h es bien definida

En efecto

$$h(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + z & 5y \\ 5y & x - z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x + z & 5y \\ 5y & x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z & 5y \\ 5y & x - z \end{pmatrix}^t \text{ entonces } h(x, y, z) \in \mathbb{S}.$$

Así que h es bien definida.

Etapa 2. P.d.q. h es un homomorfismo de grupos.

En efecto

Si $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{aligned} h(u + v) &= h(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\ &= \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) + (u_3 + v_3) & 5(u_2 + v_2) \\ 5(u_2 + v_2) & (u_1 + v_1) - (u_3 + v_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (u_1 + u_3) + (v_1 + v_3) & 5u_2 + 5v_2 \\ 5u_2 + 5v_2 & (u_1 - u_3) + (v_1 - v_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + u_3 & 5u_2 \\ 5u_2 & u_1 - u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 + v_3 & 5v_2 \\ 5v_2 & v_1 - v_3 \end{pmatrix} \\ &= h(u_1, u_2, u_3) + h(v_1, v_2, v_3) \\ &= h(u) + h(v) \end{aligned}$$

Etapa 3. P.d.q. h es inyectiva

Alternativa 1. Usando la definición usual de inyectividad. e.e si $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ entonces debemos mostrar que, $h(u) = h(v) \Longrightarrow u = v$

Luego,

$$
\begin{aligned}
h(u) = h(v) &\Longleftrightarrow h(u_1, u_2, u_3) = h(v_1, v_2, v_3) \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 + u_3 & 5u_2 \\ 5u_2 & u_1 - u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_3 & 5v_2 \\ 5v_2 & v_1 - v_3 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \begin{array}{rcl|l} u_1 + u_3 & = & v_1 + v_3 & (1) \\ 5u_2 & = & 5v_2 & (2) \\ u_1 - u_3 & = & v_1 - v_3 & (3) \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} 2u_1 = 2v_1 & (\text{de } (1) + (3)) \\ 5u_2 = 5v_2 & (\text{de } (2)) \\ 2u_3 = 2v_3 & (\text{de } (1) - (3)) \end{cases} \\
&\Longrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3 \\
&\Longrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \\
&\Longrightarrow u = v
\end{aligned}
$$

Alternativa 2. Usando el núcleo de h. Es decir debemos mostrar que $ker(h) = \{(0, 0, 0)\}$.

$$
\begin{aligned}
u \in ker(h) &\Longleftrightarrow u \in \mathbb{R}^3 \wedge h(u) = 0_{\mathbb{S}} \\
&\Longleftrightarrow u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \wedge h(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \wedge \begin{pmatrix} u_1 + u_3 & 5u_2 \\ 5u_2 & u_1 - u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \wedge \begin{array}{rcl|l} u_1 + u_3 & = & 0 & (1) \\ 5u_2 & = & 0 & (2) \\ u_1 - u_3 & = & 0 & (3) \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} 2u_1 = 0 & (\text{de } (1) + (3)) \\ 5u_2 = 0 & (\text{de } (2)) \\ 2u_3 = 0 & (\text{de } (1) - (3)) \end{cases} \\
&\Longrightarrow u_1 = 0 \wedge u_2 = 0 \wedge u_3 = 0 \\
&\Longrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0) \\
&\Longrightarrow u = (0, 0, 0) \\
&\Longrightarrow ker(h) \subset \{(0, 0, 0)\}
\end{aligned}
$$

Pero como $(0, 0, 0) \in ker(h))$ entonces $\{(0, 0, 0)\} \subset ker(h)$, y por tanto $ker(h) = \{(0, 0, 0)\}$

Etapa 4. P.d.q. h es sobreyectiva. Como $Img(h) \subset \mathbb{S}$ entonces debemos mostrar que $\mathbb{S} \subset Img(h)$

Sabemos que

$$
\begin{aligned}
A \in \mathbb{S} &\Longleftrightarrow A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge A = A^t \\
&\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \\
&\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \wedge b = c \\
&\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por tanto para mostrar que $\mathbb{S} \subset Img(h)$. Debemos resolver la ecuación $h(x, y, z) = A$, para A dado en $\mathbb{S}$.

Así que,

$$
\begin{aligned}
h(x,y,z)=A \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x+z & 5y \\ 5y & x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x+z &=& a \\ 5y &=& b \\ x-z &=& d \\ \hline \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = a+d & (\text{de } (1)+(3)) \\ 5y = b & (\text{de } (2)) \\ 2z = a-d & (\text{de } (1)-(3)) \end{cases} \\
&\Longrightarrow \quad x = \frac{a+d}{2} \wedge y = \frac{b}{5} \wedge z = \frac{a-d}{2} \\
&\Longrightarrow \quad h(x,y,z) = h\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b}{5}, \frac{a-d}{2}\right) = A \\
&\Longrightarrow \quad \mathbb{S} \subset Img(h)
\end{aligned}
$$

Así que h es sobreyectiva y por tanto isomorfismo

(b) Determine h^{-1}

Basta definir, $h : \mathbb{S} \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $h^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \left(\frac{a+d}{2}, \frac{b}{5}, \frac{a-d}{2}\right)$

En efecto

$$
\begin{aligned}
(h\circ h^{-1})\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} &= h\left(h^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\right) \\
&= h\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b}{5}, \frac{a-d}{2}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} + \frac{a-d}{2} & 5\frac{b}{5} \\ 5\frac{b}{5} & \frac{a+d}{2} - \frac{a-d}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
(h^{-1}\circ h)(x,y,z) &= h^{-1}(h(x,y,z)) \\
&= h^{-1}\begin{pmatrix} x+z & 5y \\ 5y & x-z \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{x+z+x-z}{2}, \frac{5y}{5}, \frac{x+z-(x-z)}{2}\right) \\
&= (x,y,z)
\end{aligned}
$$