

Solución Pep N° 1 de Álgebra¹
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
06 de Julio del 2005

- (1) Demuestre justificando paso a paso, (usando propiedades no tablas de verdad), la siguiente proposición es verdadera:

$$\sim [\{(\sim q \implies \sim p) \wedge (r \implies s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] \implies (p \wedge r)$$

Solución

Etapla 1. P.d.q. $\sim [\{(\sim q \implies \sim p) \wedge (r \implies s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] \implies (p \wedge r)$

Etapla 2. Análisis de datos y supuestos.

Si $w = [\{(\sim q \implies \sim p) \wedge (r \implies s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)]$ entonces

$$\begin{aligned} \sim w &\iff \sim [\{(p \implies q) \wedge (r \implies s)\} \wedge (\sim q \vee \sim s)] && \left(x \implies y \stackrel{\text{Tautología}}{\iff} \sim y \implies \sim x \right) \\ &\iff \sim [\{(p \implies q) \wedge (r \implies s)\} \wedge (s \implies \sim q)] && \left(x \implies y \stackrel{\text{Tautología}}{\iff} y \vee \sim x \right) \\ &\iff \sim [(p \implies q) \wedge \{(r \implies s) \wedge (s \implies \sim q)\}] && (\text{Asociatividad de } \wedge) \\ &\implies \sim [(p \implies q) \wedge (r \implies \sim q)] && (\text{Transitividad de } \wedge) \\ &\implies \sim [(p \implies q) \wedge (q \implies \sim r)] && \left(\left[x \implies y \stackrel{\text{Tautología}}{\iff} \sim y \implies \sim x \right] ; [\sim (\sim x) = x] \right) \\ &\implies \sim [(p \implies \sim r)] && (\text{Transitividad de } \wedge) \\ &\implies \sim [(\sim r \vee \sim p)] && (\text{Transitividad de } \wedge) \\ &\implies \sim \sim (r \wedge p) \\ &\implies r \wedge p && \text{De Morgan} \end{aligned}$$

- (2) Demuestre usando Inducción Matemática que

¹Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

$F(n) = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es divisible por 14, $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Solución

Etapla 1. P.d.q. $F(1)$ es verdadera.

$$\begin{aligned} 3^{4 \cdot 1 + 2} + 5^{2 \cdot 1 + 1} &= 3^6 + 5^3 \\ &= 854 \\ &= 14 \cdot 61 \end{aligned}$$

Luego, $F(1)$ es verdadera.

Etapla 2. Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera. e.e. existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$3^{4n+2} + 5^{2n+1} = 14 \cdot t \quad (H)$$

Etapla 3. Tesis de Inducción

P.d.q. $F(n+1)$ es verdadera. e.e. p.d.q. existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$3^{4(n+1)+2} + 5^{2(n+1)+1} = 14 \cdot q \iff 3^{4n+6} + 5^{2n+3} = 14 \cdot q$$

En efecto

$$\begin{aligned} &3^{4n+6} + 5^{2n+3} : 3^{4n+2} + 5^{2n+1} = 3^4 \\ (-) \quad &\begin{array}{r} 3^{4n+6} + 3^4 \cdot 5^{2n+1} \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ 5^{2n+3} - 3^4 \cdot 5^{2n+1} \end{array} \implies 3^{4n+6} + 5^{2n+3} = 3^4 \underbrace{(3^{4n+2} + 5^{2n+1})}_{\substack{= 14 \cdot t \\ \text{Por } (H)}} + 5^{2n+3} - 3^4 \cdot 5^{2n+1} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 3^{4n+6} + 5^{2n+3} &\stackrel{(H)}{=} 3^4 \cdot 14 \cdot t + 25 \cdot 5^{2n+1} - 81 \cdot 5^{2n+1} \\ &= 3^4 \cdot 14 \cdot t - 56 \cdot 5^{2n+1} \\ &= 3^4 \cdot 14 \cdot t - 14 \cdot 4 \cdot 5^{2n+1} \\ &= 14 \underbrace{(3^4 \cdot t - 4 \cdot 5^{2n+1})}_q \end{aligned}$$

Así que la etapa $F(n+1)$ es verdadera y entonces la fórmula $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{Z})$.

(3) Si $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ una Progresión Aritmética tal que

- Su primer término es 5

- Su diferencia es 7

entonces demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_k = -2(2^n - 1) + 7n 2^{n-1}$

Sugerencia: Use el teorema del binomio y las propiedades de las sumatorias.

Solución

Etapa 1. P.d.q. para cada $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_k = -2(2^n - 1) + 7n 2^{n-1}$

Etapa 2. Datos

(i) Como A es una progresión aritmética entonces existe $d \in \mathbb{R}$ (la diferencia de la progresión) tal que $a_n = a_1 + (n-1)d$. Así que $A = \{a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots\}$

(ii) Como $a_1 = 5$ y $d = 7$ entonces $a_n = 5 + 7(n-1) = -2 + 7n \quad (\forall n; n \in \mathbb{N}) \quad (1)$

Etapa 3. Ejecución

(i) De (1), sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_k &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-2 + 7k) \\ &= \sum_{k=1}^n (-2) \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n (7k) \binom{n}{k} \\ &= -2 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + 7 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k \quad (2) \end{aligned}$$

(ii) Como $2^s = \sum_{j=0}^s \binom{s}{j}$ entonces

$$2^s = \binom{s}{0} + \sum_{j=1}^s \binom{s}{j} \iff 2^s = 1 + \sum_{j=1}^s \binom{s}{j}$$

Luego,

$$2^s - 1 = \sum_{j=1}^s \binom{s}{j} \quad (3)$$

(iii) Además de la definición de $\binom{n}{k}$, sigue que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} k &= \frac{n!}{(n-k)! \, k!} k \\
&= \frac{n!}{(n-k)! \, (k-1)! \, k} k \\
&= \frac{n!}{(n-k)! \, (k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)! \, n}{(n-k)! \, (k-1)!} \\
&= \binom{n-1}{k-1} n
\end{aligned}$$

Así que,

$$\binom{n}{k} k = \binom{n-1}{k-1} n \quad (4)$$

(iv) Finalmente, sustituyendo (3) y (4) en (2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_k &= -2(2^n - 1) + 7 \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} n \\
&= -2(2^n - 1) + 7 \sum_{u=0}^{n-1} \binom{n-1}{u} n \quad (\text{haciendo } u = k-1) \\
&= -2(2^n - 1) + 7n \sum_{u=0}^{n-1} \binom{n-1}{u} \\
&= -2(2^n - 1) + 7n(2^{n-1})
\end{aligned}$$

(4) Define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathfrak{R}$, como sigue:

$$x \mathfrak{R} y \iff x^2 - y^2 = y - x$$

(a) Demuestre que $\mathfrak{R}$ es una relación de equivalencia

Solución

$\mathfrak{R}$ es una relación de equivalencia si $\mathfrak{R}$ es una relación reflexiva (refleja), simétrica y transitiva.

- P.d.q. $\mathfrak{R}$ es una relación refleja

En efecto

$$x^2 - x^2 = 0 = x - x \quad (\forall x; x \in \mathbb{Z}) \implies x^2 - x^2 = x - x \implies x \mathfrak{R} x \quad (\forall x; x \in \mathbb{Z})$$

Así que $\mathfrak{R}$ es una relación refleja.

- P.d.q. $\mathfrak{R}$ es una relación simétrica

En efecto

Si $x\mathfrak{R}y$ entonces

$$\begin{aligned} x\mathfrak{R}y &\iff x^2 - y^2 = y - x \\ &\implies -(x^2 - y^2) = -(y - x) \\ &\implies y^2 - x^2 = x - y \\ &\implies y\mathfrak{R}x \end{aligned}$$

Así que $\mathfrak{R}$ es una relación simétrica.

- P.d.q. $\mathfrak{R}$ es una relación transitiva

En efecto

Si $x\mathfrak{R}y \wedge y\mathfrak{R}z$ entonces

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x\mathfrak{R}y \iff x^2 - y^2 = y - x \\ y\mathfrak{R}z \iff y^2 - z^2 = z - y \end{array} \right\} &\implies (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2) = (y - x) + (z - y) \\ &\implies x^2 - z^2 = z - x \\ &\implies x\mathfrak{R}z \end{aligned}$$

Así que $\mathfrak{R}$ es una relación transitiva.

- (b) Determine explícitamente los elementos de la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{Z}$, $\bar{x}$.

Solución

Recordemos que $\bar{x} = \{u \in \mathbb{Z} \mid u\mathfrak{R}x\}$. Así que,

$$\begin{aligned} u \in \bar{x} &\iff u \in \mathbb{Z} \wedge u\mathfrak{R}x \\ &\iff u \in \mathbb{Z} \wedge u^2 - x^2 = x - u \\ &\iff u \in \mathbb{Z} \wedge u^2 + u + (-x^2 - x) = 0 \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-x^2 - x)}}{2} \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x^2 + 4x}}{2} \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge u = \frac{-1 \pm \sqrt{(1 + 2x)^2}}{2} \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge u = \frac{-1 \pm (1 + 2x)}{2} \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge \left[u = \frac{-1 + (1 + 2x)}{2} \vee u = \frac{-1 - (1 + 2x)}{2} \right] \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge \left[u = \frac{2x}{2} \vee u = \frac{-2 - 2x}{2} \right] \\ &\implies u \in \mathbb{Z} \wedge [u = x \vee u = -1 - x] \end{aligned}$$

Así que $\bar{x} = \{x, -1 - x\}$