Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución PAS de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
14 de Septiembre del 2005

(1) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula

$$F(n): \qquad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(4(-2)^n - 1) & \frac{4}{3}(1 - (-2)^n) \\ \\ \frac{1}{3}((-2)^n - 1) & \frac{1}{3}(4 - (-2)^n) \end{pmatrix} \qquad \text{es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

Solución

Etapa 1. Pd.q. $F(1)$ es verdadera.

$$\begin{aligned} A^1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(4(-2)^1 - 1) & \frac{4}{3}(1 - (-2)^1) \\ \\ \frac{1}{3}((-2)^1 - 1) & \frac{1}{3}(4 - (-2)^1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-9) & \frac{4}{3}(3) \\ \\ \frac{1}{3}(-3) & \frac{1}{3}(6) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

Luego, $F(1)$ es verdadera.

(0,1 puntos)

Etapa 2. Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera. e.e.

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(4(-2)^n - 1) & \frac{4}{3}(1 - (-2)^n) \\ \\ \frac{1}{3}((-2)^n - 1) & \frac{1}{3}(4 - (-2)^n) \end{pmatrix} \qquad (H)$$

(0,2 puntos)

Etapa 3. Tesis de Inducción

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

P.d.q. $F(n+1)$ es verdadera. e.e. P.d.q.

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}((-2)^{n+1}-1) & \frac{4}{3}(1-(-2)^{n+1}) \\ \\ \frac{1}{3}((-2)^{n+1}-1) & \frac{1}{3}(4-(-2)^{n+1}) \end{pmatrix}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n \cdot A \\
&\overset{H}{(=)} \begin{pmatrix} \frac{4}{3}((-2)^{n}-1) & \frac{4}{3}(1-(-2)^{n}) \\ \\ \frac{1}{3}((-2)^{n}-1) & \frac{1}{3}(4-(-2)^{n}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{3}{3}(4(-2)^n-1) - \frac{4}{3}(1-(-2)^n) & \frac{4}{3}(4(-2)^n-1) + \frac{8}{3}(1-(-2)^n) \\ \\ -\frac{3}{3}((-2)^n-1) - \frac{1}{3}(4-(-2)^n) & \frac{4}{3}((-2)^n-1) + \frac{2}{3}(4-(-2)^n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{12}{3}(-2)^n + \frac{3}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}(-2)^n & \frac{16}{3}(-2)^n - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - \frac{8}{3}(-2)^n \\ -\frac{3}{3}(-2)^n + \frac{3}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{4}{3}(-2)^n - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} - \frac{2}{3}(-2)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{8}{3}(-2)^n - \frac{1}{3} & \frac{8}{3}(-2)^n + \frac{4}{3} \\ \\ -\frac{2}{3}(-2)^n - \frac{1}{3} & \frac{2}{3}(-2)^n + \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}[4(-2)(-2)^n - 1] & \frac{4}{3}[2(-2)^n + 1] \\ \\ \frac{1}{3}[-(2)(-2)^n - 1] & \frac{1}{3}[2(-2)^n + 4] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}[4(-2)(-2)^n - 1] & \frac{4}{3}[-(-2)(-2)^n + 1] \\ \\ \frac{1}{3}[-(2)(-2)^n - 1] & \frac{1}{3}[-(-2)(-2)^n + 4] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}[4(-2)^{n+1} - 1] & \frac{4}{3}[1-(-2)^{n+1}] \\ \\ \frac{1}{3}[(-2)^{n+1} - 1] & \frac{1}{3}[4-(-2)^{n+1}] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(0,7 puntos)

(b) Demuestre que $A^n \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

Etapa 1. P.d.q. $A^n \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

Etapa 2. Datos

(i) $A^n \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) \quad (\forall n; n \in \mathbb{N}) \Longleftrightarrow \det(A^n) \neq 0 \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

(ii) Además como, $\det(A)^n = \underbrace{\det(A)\cdots\det(A)}_{(n-\text{veces})}$ $(\forall n; n \in \mathbb{N})$ entonces $\det(A)^n = (\det(A))^n$

(iii) Por otra parte, $\det(A) = \det\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -2.$

Etapa 3. Conclusión

De (ii) y (iii) sigue que: $\det(A^n) = (-2)^n \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

Finalmente como, $(-2)^n \neq 0 \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$ entonces de (i) sigue que $A^n \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

(0,5 puntos)

Solución alternativa: Directa

$$
\begin{aligned}
\det(A^n) &= \det\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(4(-2)^n - 1) & \frac{4}{3}(1-(-2)^n) \\ \\ \frac{1}{3}((-2)^n - 1) & \frac{1}{3}(4-(-2)^n) \end{pmatrix} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N}) \\
&= \frac{1}{3}(4(-2)^n - 1)\cdot\frac{1}{3}(4-(-2)^n) - \frac{4}{3}(1-(-2)^n)\cdot\frac{1}{3}((-2)^n - 1) \\
&= \frac{1}{9}[(4(-2)^n - 1)\cdot(4-(-2)^n)] - \frac{4}{9}[(1-(-2)^n)\cdot((-2)^n - 1)] \\
&= \frac{1}{9}[16(-2)^n - 4(-2)^{n+1} - 4 + (-2)^n] - \frac{4}{9}[(-2)^n - 1 - (-2)^{n+1} + (-2)^n] \\
&= \frac{1}{9}[17(-2)^n - 4(-2)^{n+1} - 4] - \frac{4}{9}[2(-2)^n - 1 - (-2)^{n+1}] \\
&= \frac{17}{9}(-2)^n - \frac{4}{9}(-2)^{n+1} - \frac{4}{9} - \frac{8}{9}(-2)^n - \frac{4}{9} - \frac{4}{9}(-2)^{n+1} \\
&= (-2)^n \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

Como $(-2)^n \neq 0$ $(\forall n; n \in \mathbb{N})$ entonces $A^n \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

(2) Consider $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ para definir la función:

$$h_A \ : \ \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \longmapsto \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad h_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + \lambda^2 y + z, x + \lambda y + z, x - z)$$

(a) Demuestre que h_A es un homomorfismo de grupos $(\forall\ \lambda; \lambda \in \mathbb{R})$

Solución

Sean $u \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ y $v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$. P.d.q. h_A es un homomorfismo de grupos. e.e. debemos verificar que

$$h_A(u+v) = h_A(u) + h_A(v)$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
u \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) &\iff u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \\
v \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) &\iff v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
h_A(u+v) &= h_A\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} \\
&= (x_1+x_2+\lambda^2(y_1+y_2)+z_1+z_2, x_1+x_2+\lambda(y_1+y_2)+z_1+z_2+z, x_1+x_2-(z_1+z_2)) \\
&= (x_1+\lambda^2 y_1+z_1+x_2+\lambda^2 y_2+z_2, x_1+\lambda y_1+z_1+x_2+\lambda y_2+z_2, x_1-z_1+x_2-z_2) \\
&= (x_1+\lambda^2 y_1+z_1, x_1+\lambda y_1+z_1, x_1-z_1)+(x_2+\lambda^2 y_2+z_2, x_2+\lambda y_2+z_2, x_2-z_2) \\
&= h_A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + h_A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\
&= h_A(u)+h_A(v)
\end{aligned}
$$

Luego, h_A es un homomorfismo $(\forall\lambda; \lambda \in \mathbb{R})$.

(0,5 puntos)

(b) Determine el conjunto $I = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h_A \text{ es un homomorfismo inyectivo de grupos}\}$

Solución

1. $\lambda \in I \iff \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge\ h_A$ es un homomorfismo inyectivo de grupos $\iff \ker(h_A) = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)}\}$
2. Luego, debemos estudiar el $\ker(h_A)$.

$$
\begin{aligned}
u \in \ker(h_A) &\iff u \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \wedge h_A(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge h_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \\
&\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge (x+\lambda^2 y+z, x+\lambda y+z, x-z) = (0,0,0) \\
&\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \left.\begin{array}{rcl} x+\lambda^2 y+z &=& 0 \\ x+\lambda y+z &=& 0 \\ x-z &=& 0 \end{array}\right| \\
&\implies u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \wedge \quad [x = z \wedge 2x+\lambda^2 y = 0 \wedge 2x+\lambda y = 0 \wedge \lambda^2 y = \lambda y] \\
&\implies u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \wedge \quad [x = z \wedge 2x+\lambda^2 y = 0 \wedge 2x+\lambda y = 0 \wedge (\lambda^2-\lambda)y = 0]
\end{aligned}
$$

Luego tenemos dos casos:

Caso 1. $(\lambda^2-\lambda) \neq 0$, e.e. $\lambda \neq 0 \wedge \lambda \neq 1$ entonces $y = 0$ y $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Así, $\lambda \in \mathbb{R}-\{0,1\}$ entonces $\ker(h_A) = \{0,0,0\}$, pues $\{0,0,0\} \subset \ker(h_A)$, y por ende h_A inyectiva.

Caso 2. $(\lambda^2 - \lambda) = 0$, e.e. $\lambda = 0 \wedge \lambda = 1$ entonces $y \in \mathbb{R}$ y $\ker(h_A) \neq \{0,0,0\}$, y por ende h_A no inyectiva.

Así que $I = \mathbb{R} - \{0,1\}$.

(1.0 puntos)

(3) Si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ tal que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \cos\alpha & 1 & \cos\alpha \\ 1 & \cos\alpha & \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$ entonces determine el conjunto:

$$\mathbb{J} \quad = \quad \{\alpha \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Solución

1. Sabemos que: $\alpha \in \mathbb{J} \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ A \neq \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\} \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \det(A) = 0$

2. Si $\alpha = 2k\pi$ entonces $\cos(2k\pi) = 1 \qquad (\forall k; k \in \mathbb{Z})$

3. Así que, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\det(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$
4. De donde, $\{\alpha = 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{J}$.

(0,5 puntos)

Recíprocamente

1. $\alpha \in \mathbb{J} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ A \neq \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\} \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \det(A) = 0$
2. Así que debemos calcular el $\det(A)$:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cos\alpha - 1 & \cos\alpha - 1 \\ 0 & \cos\alpha - 1 & 0 & \cos\alpha - 1 \\ 0 & \cos\alpha - 1 & \cos\alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{haciendo } \begin{pmatrix} (L_2 \longrightarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \longrightarrow L_3 - L_1) \\ (L_4 \longrightarrow L_4 - L_1) \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha - 1 & \cos\alpha - 1 \\ \cos\alpha - 1 & 0 & \cos\alpha - 1 \\ \cos\alpha - 1 & \cos\alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{haciendo } (L_2 \Longrightarrow L_2 - L_3) \\
&= \det\begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha - 1 & \cos\alpha - 1 \\ 0 & 1 - \cos\alpha & \cos\alpha - 1 \\ \cos\alpha - 1 & \cos\alpha - 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (\cos\alpha - 1)\det\begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \cos\alpha - 1 \\ 1 - \cos\alpha & \cos\alpha - 1 \end{pmatrix} \\
&= 2(\cos\alpha - 1)^3
\end{aligned}$$

3. Por tanto:

$$
\begin{aligned}
\alpha \in \mathbb{J} \quad &\Longrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ (\cos\alpha - 1) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \cos\alpha = 1 \\
&\Longrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \alpha = 2k\pi
\end{aligned}
$$

De donde, $\mathbb{J} \subset \{\alpha = 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, y entonces $\mathbb{J} = \{\alpha = 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(1.0 puntos)

(4) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n), \quad (n \geq 3)$ tal que $\det(A) \neq 0$. Demuestre que:

$$Adj((Adj(A)) = (\det(A))^{n-2} \cdot A$$

Como $A \cdot Adj(A) = \det(A) \cdot I_n$ vale $(\forall A; A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ y como $Adj(A) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ entonces

$$
\begin{array}{rcll}
Adj(A) \cdot Adj(Adj(A)) & = & \det(Adj(A))I_n & \\
& \Downarrow & & \\
Adj(A) \cdot Adj(Adj(A)) & = & (\det(A))^{n-1}I_n & \big(\text{ pues}, \det(Adj(A)) = (\det(A))^{n-1}\big) \\
& \Downarrow & & \\
\underbrace{A \cdot Adj(A)}_{(*)} \cdot Adj(Adj(A)) & = & A \cdot (\det(A))^{n-1}I_n & \\
& \Downarrow & & \\
\det(A)I_n \cdot Adj(Adj(A)) & = & (\det(A))^{n-1}AI_n & \\
& \Downarrow & & \\
Adj(Adj(A)) & = & (\det(A))^{n-2}A &
\end{array}
$$

(1.5 puntos)