Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución de Examen de Álgebra[1] - Ingeniería Civil

Profesor Ricardo Santander Baeza
09 de Marzo del 2006

(1) Considere el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & a \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & b \\ -5x_1 & - & 5x_2 & + & 21x_3 & = & c \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine los conjuntos

- $S_1 = \{c \in \mathbb{R} \mid (\star)$ tiene solución $\}$
- $S_2 = \{c \in \mathbb{R} \mid (\star)$ no tiene solución $\}$

Solución

Etapa 1. Tenemos la notación matricial para $(*)$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & a \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & b \\ -5x_1 & - & 5x_2 & + & 21x_3 & = & c \end{array}\right| \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -5 & -5 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Etapa 2. Escalonamos La matriz ampliada asociada a $(*)$.

$$\begin{aligned} A_a = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & a \\ 3 & 1 & -5 & | & b \\ -5 & -5 & 21 & | & c \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & a \\ 1 & 2 & -8 & | & b-a \\ -5 & -5 & 21 & | & c \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & | & b-a \\ 2 & -1 & 3 & | & a \\ -5 & -5 & 21 & | & c \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & | & b-a \\ 0 & -5 & 19 & | & 3a-2b \\ 0 & 5 & -19 & | & 5b-5a+c \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & | & b-a \\ 0 & -5 & 19 & | & 3a-2b \\ 0 & 0 & 0 & | & 3b-2a+c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Etapa 3. De las conclusiones

$(*)$ tiene solución si y sólo si $3b - 2a + c = 0$, luego

- $S_1 = \{c \in \mathbb{R} \mid c = 2a - 3b\}$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

- $S_2 = \{c \in \mathbb{R} \mid c \neq 2a - 3b\}$

(2) Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$, tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = -a_1 - a_0x - a_2x^2$ entonces

(a) Demuestre que T es diagonalizable

Solución

Etapa 1. Determinamos $P_T(\lambda)$ el polinomio característico.

(i) $[T]_{p(2)}^{p(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) Luego, $P_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$

Así que los valores propios son $V.P. = \{-1, 1\}$

Etapa 2. Verifiquemos si T es o no diagonalizable

Si $m_T(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$ entonces

$$\begin{aligned}
m_T\left([T]_{p(2)}^{p(2)}\right) &= \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así que T es diagonalizable.

(b) Demuestre que T es un isomorfismo.

En efecto

Como T es diagonalizable y los valores propios son no nulos entonces $\det(T) \neq 0$, en realidad $\det(T) = -1$. Pues,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

(3) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, tal que verifique simultáneamente las condiciones:

- $(\mathbb{R}^3)_{-1} = \langle\{(1,1,1),(-1,-1,0)\}\rangle$ y
- $(\mathbb{R}^3)_{\sqrt{2}} = \langle\{(1,0,1),(-3,0,-3\}\rangle$

Solución

Etapa 1. Debemos construir $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ sujeta a las condiciones expuestas encima, en particular debemos decir ¿ quién es $T(x,y,z)$?

Etapa 2. Manejo de la Información

(a) Como $\alpha = \{(1,1,1),(-1,-1,0)\}$ es un conjunto linealmente independiente, pues

$$a(1,1,1)+b(-1,-1,0) = (0,0,0) \Longrightarrow (a-b,a-b,a) = (0,0,0) \Longrightarrow a = b = 0$$

y como $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$, sigue que $\beta = \{(1,0,1),(-3,0,-3)\}$ es linealmente dependiente. Así que podemos tomar a $\beta = \{(1,0,1)\}$

(b) Además $\gamma = \{(1,1,1),(-1,-1,0),(1,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, pues,

$$\begin{aligned} a(1,1,1)+b(-1,-1,0)+c(1,0,1) = (0,0,0) &\Longrightarrow (a-b+c,a-b,a+c) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

(c) Finalmente

$$\begin{array}{lclcl} T((1,1,1)) & = & -(1,1,1) & = & (-1,-1,-1) \\ T((-1,-1,0)) & = & -(-1,-1,0) & = & (1,1,0) \\ T(1,0,1) & = & \sqrt{2}(1,0,1) & = & (\sqrt{2},0\sqrt{2}) \end{array}$$

Etapa 3. Conclusiones

(a) Como $\gamma = \{(1,1,1),(-1,-1,0),(1,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ entonces podemos resolver la ecuación

$$(x,y,z) = a(1,1,1)+b(-1,-1,0)+c(1,0,1)$$

En efecto

$$\begin{aligned} (x,y,z) = (a-b+c,a-b,a+c) &\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{lcl} a-b+c & = & x \\ a-b & = & y \\ a+c & = & z \end{array}\right| \\ &\Longrightarrow c = x-y \wedge a = z+y-x \wedge b = z-x \end{aligned}$$

(b) Así que

$$(x,y,z) = (z+y-x)(1,1,1)+(z-x)(-1,-1,0)+(x-y)(1,0,1)$$

De donde sigue finalmente que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (z+y-x)T(1,1,1)+(z-x)T(-1,-1,0)+(x-y)T(1,0,1) \\ &= (z+y-x)(-1,-1,-1)+(z-x)(1,1,0)+(x-y)(\sqrt{2},0,\sqrt{2}) \\ &= (x-y-z+z-x+\sqrt{2}(x-y),x-y-z+z-x,x-y-z+\sqrt{2}(x-y)) \\ &= (-y+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y,-y,x-y-z+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y) \\ &= (\sqrt{2}x-(1+\sqrt{2})y,-y,x(1+\sqrt{2})-y(1+\sqrt{2})-z) \end{aligned}$$

4.1 Demuestre que $T \in Ł_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \wedge T$ no sobreyectiva $\Longrightarrow T = 0$

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que $T(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \quad (\forall u : u \in \mathbb{R}^4)$

Etapa 2. Manejo de la información

(a) Si $T \in Ł_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ entonces es aplicable el Teorema de la dimensión. Es decir que es aplicable la ecuación

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) &= \dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) \\ &\Downarrow \\ 4 &= \dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) \end{aligned}$$

(b) Por otra parte, Img (T) es un subespacio de $\mathbb{R}$, y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) \leq 1$, esto es $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) = 1$ o $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) = 0$.

Etapa 3. Conclusión

Como T no sobreyectiva entonces $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) < 1$ y sigue que $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) = 0$, así que $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, pero $\ker(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ entonces $\ker(T) = \mathbb{R}^4$ y $T = 0$.

4.2 Demuestre que $T \in Ł_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4) \wedge$ no inyectiva $\Longrightarrow T = 0$

Solución

Etapa 1. Debemos mostrar que $T(u) = 0_{\mathbb{R}} \quad (\forall u : u \in \mathbb{R})$

Etapa 2. Uso de la información

(a) Si $T \in Ł_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$ entonces es aplicable el Teorema de la dimensión. Es decir que es aplicable la ecuación

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) &= \dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) \\ &\Downarrow \\ 1 &= \dim_{\mathbb{R}}(\ker(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Img }(T)) \end{aligned}$$

(b) Si T no inyectiva entonces $\dim_{\mathbb{R}} \ker(T) = 1$, pues $\ker(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}$ y como sabemos $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$. Así que $\ker(T) = \mathbb{R}$ y $T = 0$.