Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Examen de Álgebra[1] - Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
04 de Enero del 2006

(1) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ x+y+az &=& 1 \\ by+cz &=& c \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine los siguientes conjuntos

(a) $\mathbb{S}_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$

(b) $\mathbb{S}_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ tiene solución única}\}$

(c) $\mathbb{S}_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid (*) \text{ no tiene solución}\}$

Solución:

Etapa 1. Construimos la matriz ampliada A_a del sistema:

$$A_a = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & b & c & c \end{array}\right)$$

Etapa 2. Realizando operaciones elementales obtenemos la matriz E:

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c & c \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Etapa 3. Análisis de la matriz E

Si $a = 1$:

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ by &=& c(1-z) \end{array}\right|$$

Luego $a = 1 \Longrightarrow (1,b,c) \in \mathbb{S}_1$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Si $a \neq 1$:

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{ccc|} x+y & = & 1 \\ by & = & c \\ z & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

Luego,

$a \neq 1 \wedge b = 0 \wedge c \neq 0 \Longrightarrow (a, 0, c) \in \mathbb{S}_3$

$a \neq 1 \wedge b = 0 \wedge c = 0 \Longrightarrow (a, 0, 0) \in \mathbb{S}_1$

$a \neq 1 \wedge b \neq 0 \Longrightarrow (a, b, c) \in \mathbb{S}_2$

(2) Construya, (si es posible) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

(a) $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_0 = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$

Solución

Etapa 1. Interpretamos los datos:

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_{-2} & \Longleftrightarrow & T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_{-2} & \Longleftrightarrow & T\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Además

$$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_0 = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\} \Longrightarrow T \text{ inyectiva}$$

Etapa 2. Construimos una base para definir la transformación T pedida.

Sea $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Una α así construida es una base

En efecto

Si $a_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2+a_3 &=& 0\\ a_1-a_2 &=& 0\\ a_1+a_2 &=& 0\\ a_1+a_2+a_4 &=& 0 \end{array}\right| \Longrightarrow a_1=a_2=a_3=a_4=0$$

Finalmente, para $\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix} &= a_1\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} a_1+a_2+a_3 &=& x\\ a_1-a_2 &=& y\\ a_1+a_2 &=& z\\ a_1+a_2+a_4 &=& w \end{array}\right| \Longrightarrow a_1=\frac{y+z}{2}\wedge a_2=\frac{z-y}{2}\wedge a_3=x-z\wedge a_4=w-z
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix} &= \frac{y+z}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \frac{z-y}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + (x-z)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (w-z)\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\Downarrow\\
T\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix} &= \frac{y+z}{2}T\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \frac{z-y}{2}T\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + (x-z)T\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (w-z)T\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\Downarrow\\
T\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix} &= \frac{y+z}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix} + \frac{z-y}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix} + (x-z)\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (w-z)\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3) Determine valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$

Solución

Etapa 1. El polinomio característicos es

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} (\lambda-2) & -1 & 0\\ 0 & (\lambda-1) & 1\\ 0 & -2 & (\lambda-4)\end{pmatrix}\\
&= (\lambda-2)^2(\lambda-3)
\end{aligned}$$

Luego, los valores propios son $V.P. = \{2, 3\}$

Etapa 2. Determinamos los valores propios:

En general

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{\lambda} &\iff u \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1) \wedge Au = \lambda u \\
&\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} (\lambda-2) & -1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & 1 \\ 0 & -2 & (\lambda-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{lcl} 2x+y & = & \lambda x \\ y-z & = & \lambda y \\ 2y+4z & = & \lambda z \end{array}\right| \qquad (*)
\end{aligned}$$

Caso $\lambda = 2$. De $(*)$ sigue que

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{2} &\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{lcl} 2x+y & = & 2x \\ y-z & = & 2y \\ 2y+4z & = & 2z \end{array}\right| \\
&\iff u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Caso $\lambda = 3$. De $(*)$ sigue que

$$\begin{aligned}
u \in (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{3} &\iff u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left.\begin{array}{lcl} 2x+y & = & 3x \\ y-z & = & 3y \\ 2y+4z & = & 3z \end{array}\right| \\
&\iff u = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -2y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego,$(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))_{3} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

(4) Define en $\mathbb{R}_2[x]$ el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

(a) Usando este producto interno obtenga una base ortogonal α para $\mathbb{R}_2[x]$, a partir de la base canónica $\{1, x, x^2\}$

Solución

Sea $p_1 = 1$. Puesto que

$$\langle 1, 1\rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3, \quad \langle x, 1\rangle = 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 3$$

se define a

$$p_2 = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 = x - 1$$

De igual manera

$$\langle x-1, x-1\rangle = 2, \ \ \langle x^2, 1\rangle = 5, \ \ \langle x^2, x-1\rangle = 4$$

Tenemos que:

$$p_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 - \frac{\langle x^2, x-1\rangle}{\langle x-1, x-1\rangle}(x-1) = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$$

Luego

$$\{p_1, p_2, p_3\} = \{1, x-1, x^2 - 2x + \frac{1}{3}\}$$

es una base ortogonal de P_2 con respecto al producto interno dado.

(b) Determine $[1 + x + x^2]_\alpha$

Solución

$$[1 + x + x^2]_\alpha \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$