Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Profesor Ricardo Santander Baeza
Solución Pep N^o 4 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
04 de Diciembre del 2004

(1) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Sea $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \mathbb{V}$ tal que $w_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} v_{(n-j+1)}$, para $(1 \leq i \leq n)$.

(i) Demuestre que β es una base de $\mathbb{V}$

Solución

1. Observamos que por definición los w_i, para $(1 \leq i \leq n)$ son de la forma:

$$\begin{array}{rcl} w_i & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{i} v_{(n-j+1)}, \text{ para } (1 \leq i \leq n). \\ & \Updownarrow & \\ w_i & = & v_n + v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_{(n-i+1)} \end{array}$$

Así que cada uno de ellos, es en particular de la forma:

$$\underbrace{\begin{array}{lcl} w_1 & = & v_n \\ w_2 & = & v_n + v_{n-1} \\ w_3 & = & v_n + v_{n-1} + v_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & = & v_n + v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_1 \end{array}}_{(*)} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{array}{lcl} v_n & = & w_1 \\ v_{n-1} & = & w_2 - w_1 \\ v_{n-2} & = & w_3 - w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & = & w_n - w_{n-1} \end{array}}_{(2*)}$$

2. Mostremos que β es Li. en $\mathbb{V}$.

2.1 Para ello partamos suponiendo que el origen de $\mathbb{V}$ tiene dos representaciones, en términos de los w_i es decir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = 0_{\mathbb{V}} \Longleftrightarrow a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + \cdots + a_nw_n = 0_{\mathbb{V}} \qquad (3*)$$

[1] Cada problema vale 2.0 puntos.
Tiempo 120'

2.2 Aplicando la información de $(*)$ a $(3*)$ obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = 0_{\mathbb{V}} &\iff \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} v_{(n-j+1)} = 0_{\mathbb{V}} \\
&\iff a_1 v_n + a_2(v_n + v_{n-1}) + \cdots + a_n(v_n + v_{n-1} + v_{n-2} + \cdots + v_1) = 0_{\mathbb{V}} \\
&\iff (a_1 + \cdots + a_n)v_n + (a_2 + \cdots + a_n)v_{n-1} + \cdots (a_{n-1} + a_n)v_2 + a_n v_1 = 0_{\mathbb{V}}
\end{aligned}
$$

$$
\stackrel{\alpha \text{ Li}}{\Longrightarrow}
\left.\begin{array}{rcl}
a_1 + a_2 + \cdots + a_n & = & 0 \\
a_2 + \cdots + a_n & = & 0 \\
 & \vdots & \\
a_{n-1} + a_n & = & 0 \\
a_n & = & 0
\end{array}\right| \Longrightarrow a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = 0
$$

Así que β es Li en $\mathbb{V}$.

3. Mostremos que β es un sistema de generadores para $\mathbb{V}$.

Para ello consideremos $u \in \mathbb{V}$. Debemos mostrar que u tiene una representación como combinación lineal en términos de los w_i.

3.1. Como α es una base de $\mathbb{V}$ entonces en particular, es un sistema de generadores para $\mathbb{V}$, así que existen escalares; $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tal que

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n. \qquad (4*)$$

3.2 Aplicando $(2*)$ en $(4*)$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
u &= a_1(w_n - w_{n-1}) + a_2(w_{n-1} - w_{n-2}) + a_3(w_{n-2} - w_{n-3}) + \cdots + a_n w_1 \\
& \Downarrow \\
u &= \underbrace{a_1}_{c_1} w_n + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{c_2} w_{n-1} + \underbrace{(a_3 - a_2)}_{c_3} w_{n-2} + \cdots + \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{c_n} w_1 \qquad (5*)
\end{aligned}
$$

Luego, β es un sistema de generadores para $\mathbb{V}$

(ii) Determine la matriz $[I]_{\alpha}^{\beta}$

Solución

1. Por definición de la matriz cambio de base tenemos que:

$$[I]_{\alpha}^{\beta} = ([v_1]_{\beta}\ [v_2]_{\beta}\ [v_3]_{\beta}\ \cdots [v_n]_{\beta}\ ) \qquad (6*)$$

2. De (5∗) sigue que:

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} (a_n - a_{n-1}) \\ (a_{n-1} - a_{n-2}) \\ (a_{n-2} - a_{n-3}) \\ \vdots \\ (a_3 - a_2) \\ (a_2 - a_1) \\ a_1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \qquad (7*)$$

3. Aplicado (7∗) a (6∗) paso a paso tenemos que

$$\begin{aligned} [I]_\alpha^\beta &= ([v_1]_\beta \; [v_2]_\beta \; [v_3]_\beta \; \cdots [v_n]_\beta \;) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & & -1 & 1 \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & & 0 & 0 \\ -1 & 1 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) Considere la función $T : \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}_n[x]$ tal que $T(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i(1-x)^{i-1}$; $(n \in \mathbb{N})$

(a) Demuestre que T es un isomorfismo.
Solución

1. Demostremos en primer lugar que esta T así definida es una transformación lineal. Para ello consideremos los ingredientes:

$$\begin{aligned} u &= (a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ v &= (b_1, b_2, \cdots, b_n, b_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ y } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1.1 P.d.q. $T(u+v) = T(u) + T(v)$

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T((a_1+b_1), (a_2+b_2), \cdots, (a_n+b_n), (a_{n+1}+b_{n+1}))) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (a_i+b_i)(1-x)^{i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i(1-x)^{i-1} + \sum_{i=1}^{n+1} b_i(1-x)^{i-1} \\ &= T(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) + T(b_1, b_2, \cdots, b_n, b_{n+1}) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

1.2 P.d.q. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$

$$\begin{aligned}
T(\lambda u) &= T(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n, \lambda a_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (\lambda a_i)(1-x)^{i-1} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n+1} a_i(1-x)^{i-1} \\
&= \lambda T(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) \\
&= \lambda T(u)
\end{aligned}$$

Luego $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}_n[x])$

2. Como ambos espacios tienen la misma dimensión, es decir $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+1}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$ entonces en virtud del Teorema de la Dimensión, basta mostrar que T es inyectiva o bien sobreyectiva.

   2.1 Mostremos que T es inyectiva. Para ello consideremos $u \in \ker(T)$

$$\begin{aligned}
u \in \ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^{n+1} \wedge T(u) = 0_{\mathbb{R}_n[x]} \\
&\iff u = (a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) \wedge T(a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) = 0_{\mathbb{R}_n[x]} \\
&\iff u = (a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}) \wedge \sum_{i=1}^{n+1} a_i(1-x)^{i-1} = 0_{\mathbb{R}_n[x]} \qquad (*)
\end{aligned}$$

   Una cuestión central aquí es que el conjunto $\alpha = \{1, (1-x), (1-x)^2, \cdots, (1-x)^n\}$ es una base para $\mathbb{R}_n[x]$, aunque para nuestros propósitos es suficiente que sea Li.

   En efecto,

   Supongamos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i(1-x)^{i-1} = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$ entonces usando, por ejemplo el método de inducción tenemos que

   (i) Si $n = 1$

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2(1-x) = 0_{\mathbb{R}_1[x]} &\implies a_1 + a_2 - a_2 x = 0_{\mathbb{R}_1[x]} \\
&\implies a_1 + a_2 = 0 \wedge -a_2 = 0 \\
&\implies a_1 = a_2 = 0
\end{aligned}$$

   Y $\{1, 1-x\}$ es Li.

   (ii) Supongamos como hipótesis de inducción que $\{1, 1-x, \cdots, (1-x)^{k-1}\}$ es Li.

   (iii) P.d.q. $\{1, 1-x, \cdots, (1-x)^k, (1-x)^k\}$ es Li.

   En efecto

$$
\begin{array}{rcl}
a_1 + a_2(1-x) + \cdots + a_k(1-x)^{k-1} + a_{k+1}(1-x)^k &=& 0_{\mathbb{R}_k[x]} \\
&\Downarrow& \\
-a_2 - \cdots - (k-1)a_k(1-x)^{k-2} - ka_{k+1}(1-x)^{k-1} &=& 0_{\mathbb{R}_k[x]} \qquad \text{(derivando)} \\
&\Downarrow& \\
-a_2 = \cdots = -(k-1)a_k = -ka_{k+1} &=& 0 \qquad \text{(hipótesis de inducción)} \\
&\Downarrow& \\
a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1} &=& 0 \\
&\Downarrow& \\
a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1} &=& 0
\end{array}
$$

Luego α es Li, así que sustituyendo en $(*)$, tenemos que

$$u \in \ker(T) \Longleftrightarrow u = (0,0,\cdots,0,0) \Longrightarrow \ker(T) = \{(0,0,\cdots,0,0)\} \text{ y } T \text{ es inyectiva, y por ende un isomorfismo}$$

(b) Determine T^{-1}, para $n = 3$

Solución

1. Como $\alpha = \{1, (1-x), (1-x)^2, (1-x)^3\}$ es una base para $\mathbb{R}_3[x]$ y por definición

$$
\begin{array}{rcl}
T(1,0,0,0) &=& 1 \\
T(0,1,0,0) &=& 1-x \\
T(0,0,1,0) &=& (1-x)^2 \\
T(0,0,0,1) &=& (1-x)^3
\end{array}
$$

2. Entonces para definir T^{-1} basta definir

$$
\begin{array}{rcl}
T^{-1}(1) &=& (1,0,0,0) \\
T^{-1}(1-x) &=& (0,1,0,0) \\
T^{-1}(1-x)^2 &=& (0,0,1,0) \\
T^{-1}(1-x)^3 &=& (0,0,0,1)
\end{array}
$$

3. Extendemos T^{-1} al espacio $\mathbb{R}_3[x]$ como sigue:

$$
\begin{array}{rcl}
a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^4 &=& b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot (1-x) + b_3 \cdots (1-x)^2 + b_4 \cdot (1-x)^3 \\
&\Updownarrow& \qquad \text{(desarrollando los binomios del segundo miembro e igualando tenemos que)} \\
a_1 &=& b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\
a_2 &=& -b_2 - 2b_3 - 3b_4 \\
a_3 &=& b_3 + 3b_4 \\
a_4 &=& -b_4 \\
&\Downarrow& \\
b_1 &=& a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
b_2 &=& -a_2 - 2a_3 - 3a_4 \\
b_3 &=& a_3 + 3a_4 \\
b_4 &=& -a_4
\end{array}
$$

Así que

$$T^{-1}(a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3) \quad = \quad (a_1 + a_2 + a_3 + a_4, -a_2 - 2a_3 - 3a_4, a_3 + 3a_4, -a_4)$$

4. Finalmente siempre es bueno comprobar. Si $p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$ entonces

$$\begin{aligned} T(T^{-1}(p(x))) &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (-a_2 - 2a_3 - 3a_4)(1 - x) + \\ &\quad (a_3 + 3a_4)(1 - x)^2 - a_4(1 - x)^3 \\ &= a_1 - a_3 - 2a_4 + a_2x + 2a_3x + 3a_4x + a_3 + 3a_4 - \\ &\quad 2a_3x - 6a_4x + a_3x^2 + 3a_4x^2 - a_4 + 3a_4x - 3a_4x^2 + a_4x^3 \\ &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^4 \end{aligned}$$

Un cálculo análogo muestra que $T^{-1}(T(a_1, a_2, a_3, a_4)) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

(3) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

(a) $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_{-2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ y

(b) $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Img}(T)) = 3$

Solución

1. Debemos determinar $T\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}}_{A} =?$, para cualquier $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

2. Si llamamos $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ entonces

2.1 α es Li.

En efecto

$$a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 & a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así que $a_1 = a_2 = 0$ y α es Li.

2.2 Por definición de subespacio propio tenemos que:

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Para determinar esta transformación (o cualquier otra), debemos definirla en una base, y que además satisfaga las propiedades pedidas.

3.1 Así que debemos completar α a una base del espacio $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$. Para ello considera:

$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ Es imprescindible verificar si β es o no una base.

$$\begin{aligned}
a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
\begin{pmatrix} a_2 + a_3 & a_1 + a_2 - a_4 \\ a_1 + a_2 + a_4 & a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, $a_2 = 0; a_3 = 0, a_1 = a_4$ y $a_1 = -a_4$. así que $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ y β es Li.

3.2 Definimos T, para que verifique las condiciones que faltan.

Si $\dim_{\mathbb{R}}(\text{ Img } (T)) = 3$ entonces por el teorema de la dimensión $\dim_{\mathbb{R}}(\text{ ker } (T)) = 1$. Por tanto para completar la definición podemos hacer lo siguiente:

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Extendemos T a todo el espacio.

$$\begin{aligned}
a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
\begin{pmatrix} a_2 + a_3 & a_1 + a_2 - a_4 \\ a_1 + a_2 + a_4 & a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
a_2 &= w \\
a_2 + a_3 &= x \\
a_1 + a_2 - a_4 &= y \\
a_1 + a_2 + a_4 &= z
\end{aligned}$$

Así que: $a_1 = \dfrac{y + z - 2w}{2} \quad \wedge \quad a_2 = w \quad \wedge \quad a_3 = x - w \quad \wedge \quad a_4 = \dfrac{z - y}{2}$. Por tanto.

$$\begin{aligned}
T \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} &= \left(\frac{y + z - 2w}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + (x - w) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{z - y}{2}\right) T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
T \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x - 3w & -z - y \\ -y - z & -2w \end{pmatrix}
\end{aligned}$$