Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Profesor Ricardo Santander Baeza

Solución Pep Nº 3 de Álgebra[1]

Ingeniería Civil

02 de Octubre del 2004

(1) Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1 & : \text{ si } i \neq j \\ u & : \text{ si } i = j \end{cases}$ entonces determine el conjunto:

$$N = \{u \in \mathbb{R} \mid A \notin U(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Solución

Etapa 1. Determinemos la matriz A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & : \text{ si } i \neq j \\ u & : \text{ si } i = j \end{cases} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} u & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u & 1 & 1 \\ 1 & 1 & u & 1 \\ 1 & 1 & 1 & u \end{pmatrix}$$

Etapa 2. Determinemos el conjunto N

$$\begin{aligned} u \in N &\iff u \in \mathbb{R} \wedge A \notin U(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \\ &\iff u \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0 \\ &\iff u \in \mathbb{R} \wedge \det \begin{pmatrix} u & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u & 1 & 1 \\ 1 & 1 & u & 1 \\ 1 & 1 & 1 & u \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Etapa 3. Resolvemos el determinante de la matriz A

[1] Cada problema vale 2.0 puntos.
Tiempo 120'

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} u & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u & 1 & 1 \\ 1 & 1 & u & 1 \\ 1 & 1 & 1 & u \end{pmatrix} & \overset{\substack{(l_1 - ul_4)\\(l_2-l_4)\\(l_3-l_4)}}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 1-u & 1-u & 1-u^2 \\ 0 & u-1 & 0 & 1-u \\ 0 & 0 & u-1 & 1-u \\ 1 & 1 & 1 & u \end{pmatrix} \\
& = -\det\begin{pmatrix} 1-u & 1-u & 1-u^2 \\ u-1 & 0 & 1-u \\ 0 & u-1 & 1-u \end{pmatrix} \\
& \overset{(l_2+l_1)}{=} -\det\begin{pmatrix} 1-u & 1-u & 1-u^2 \\ 0 & 1-u & 2-u-u^2 \\ 0 & u-1 & 1-u \end{pmatrix} \\
& = -(1-u)\det\begin{pmatrix} 1-u & 2-u-u^2 \\ u-1 & 1-u \end{pmatrix} \\
& = -(1-u)[(1-u)^2-(u-1)(2-u-u^2)] \\
& = -(1-u)^2[(1-u)+(2-u-u^2)] \\
& = -(1-u)^2[(1-u+2-u-u^2)] \\
& = (1-u)^2(u^2+2u-3) \\
& = -(1-u)^3(u+3)
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} u & 1 & 1 & 1 \\ 1 & u & 1 & 1 \\ 1 & 1 & u & 1 \\ 1 & 1 & 1 & u \end{pmatrix} = 0 & \iff -(1-u)^3(u+3) = 0 \\
& \iff u = 1 \quad \vee \quad u = -3
\end{aligned}
$$

Así que,

$$N = \{-3, 1\}$$

(2.a) Si $U_1 \in U(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$; $U_2 \in U(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ y $(U_1+U_2) \in U(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$. Demuestre que

$$(U_1^{-1}+U_2^{-1})^{-1} = U_1(U_1+U_2)^{-1}U_2$$

Solución

Sabemos que en general

$$W \in U(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) \iff W \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) \wedge (\exists W^{-1}; W^{-1} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)) : WW^{-1} = W^{-1}W = I_n$$

Así que

$$\begin{aligned}
U_1(U_1+U_2)^{-1}U_2 &= U_1(U_1+U_2)^{-1}(U_2^{-1})^{-1} \\
&= U_1(U_2^{-1}(U_1+U_2))^{-1} \\
&= U_1(U_2^{-1}U_1+U_2^{-1}U_2)^{-1} \\
&= U_1(U_2^{-1}U_1+I_n)^{-1} \\
&= U_1(U_2^{-1}U_1+U_1^{-1}U_1)^{-1} \\
&= U_1([U_2^{-1}+U_1^{-1}]U_1)^{-1} \\
&= U_1(U_1^{-1}[U_2^{-1}+U_1^{-1}]^{-1}) \\
&= I_n[U_2^{-1}+U_1^{-1}]^{-1} \\
&= [U_2^{-1}+U_1^{-1}]^{-1}
\end{aligned}$$

(2.b) Si $z = \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} i\right)$. Demuestre que

$$z^{13} - (\bar{z})^{13} - i\frac{2^{14}}{(\sqrt{3})^{13}} \text{ sen } \left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

Solución

Etapa 1. Determinemos la forma trigonométrica del complejo z

$$z = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\, i\right) \implies z = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \text{ sen } \frac{\pi}{6}\right)$$

Etapa 2. Determinemos el complejo z^{13}

$$\begin{aligned}
z^{13} &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right)\right)^{13}\\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\left(\cos\frac{13\pi}{6} + i\ \text{sen}\ \frac{13\pi}{6}\right)\\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\left(\cos\left[\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right] + i\ \text{sen}\ \left[\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right]\right)\\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\left(\cos\left[2\pi + \frac{\pi}{6}\right] + i\ \text{sen}\ \left[2\pi + \frac{\pi}{6}\right]\right)\\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Etapa 2. Determinemos el complejo $z^{13} - (\bar{z})^{13}$

$$\begin{aligned}
z^{13} - (\bar{z})^{13} &= z^{13} - \overline{(z^{13})}\\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\left(\frac{\pi}{6} - i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right)\\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\left[\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{6} - i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right)\right]\\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13} 2i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{6}\\
&= i\frac{2^{14}}{(\sqrt{3})^{13}}\ \text{sen}\ \left(\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

(3) Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & z & = & 2a-1\\ x & + & ay & + & z & = & a^2\\ x & + & y & + & az & = & 3-2a \end{array}\right|$ $(*)$

Determine los siguientes conjuntos:

$S_1 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene solución única}\}$

$S_2 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$

$S_3 = \{a \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ no tiene solución}\}$

Solución

Aplicamos el teorema del rango en el sistema (*).

Etapa 1. Escalonamos la matriz ampliada asociada al sistema (*)

$$
\begin{aligned}
(A|B) &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & | & 2a-1 \\ 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 1 & 1 & a & | & 3-2a \end{pmatrix} \; (l_1 \leftrightarrow l_2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ a & 1 & 1 & | & 2a-1 \\ 1 & 1 & a & | & 3-2a \end{pmatrix} \; \begin{matrix} (l_2 \to l_2 - al_1) \\ (l_3 \to l_3 - l_1) \end{matrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \\ 0 & 1-a & a-1 & | & 3-2a-a^2 \end{pmatrix} \; (l_2 \leftrightarrow l_3) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & | & 3-2a-a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \end{pmatrix} \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Caso 1. Si $a = 1$ entonces sustituyendo en (**), tenemos que

$$
(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}
$$

Así que $\rho(A|B) = \rho(A) = 1 < 3$. Por tanto (*) tiene infinitas soluciones.

Caso 2. Si $a \neq 1$ entonces podemos seguir operando en (**), y tenemos

$$
\begin{aligned}
(A|B) &= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1-a & a-1 & | & 3-2a-a^2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \end{pmatrix} \; (l_2 \leftrightarrow \frac{1}{1-a}\, l_2) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & | & a+3 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & | & 2a-1-a^3 \end{pmatrix} \; \begin{matrix} (l_1 \to l_1 - al_2) \\ (l_3 \to l_3 - (1-a^2)l_2) \end{matrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+a & | & -3a \\ 0 & 1 & -1 & | & a+3 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & | & 3a^2+a-4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Caso 2.1 Si $a \neq 1$ y $a = -2$ entonces $\rho(A) = 2$ y $\rho(A|B) = 3$, pues $3(-2)^2 - 2 - 4 = 6$. Así que (*) no tiene solución

Caso 2.2 Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ entonces $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$, y (*) tiene solución única.

Conclusión

$S_1 = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

$S_2 = \{1\}$

$S_3 = \{-2\}$