Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep N^{o} 2 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
12 de Junio del 2004

(1) Sea $\mathbb{U} = \{f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid c_0 - c_1 + c_2 = 0\}$

Define en $\mathbb{R}_2[x]$ la siguiente relación:

$$p(x) \, \Re \, q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad (p(x) - q(x)) \in \mathbb{U}$$

(a) Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

Solución

(i) P.d.q. $\Re$ es una relación reflexiva

En efecto

Sea $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces

$$f(x) - f(x) = 0 + 0x + 0x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge 0 - 0 + 0 = 0 \Longrightarrow (f(x) - f(x)) \in \mathbb{U}$$

Luego, $f(x)\Re f(x)$ y entonces $\Re$ es una relación reflexiva.

(ii) P.d.q. $\Re$ es una relación simétrica

En efecto

Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$.

Supongamos que $p(x)\Re q(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
p(x)\Re q(x) &\Longleftrightarrow p(x) - q(x) = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 \in \mathbb{U} \\
&\Longleftrightarrow (a_0 - b_0) - (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) = 0 \\
&\Longrightarrow (-1)[(a_0 - b_0) - (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)] = 0 \\
&\Longrightarrow -(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) - (a_2 - b_2)] = 0 \\
&\Longrightarrow (b_0 - a_0) - (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) = 0 \\
&\Longrightarrow (q(x) - p(x)) \in \mathbb{U}
\end{aligned}$$

Luego, $q(x)\Re p(x)$ y entonces $\Re$ es una relación simétrica.

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

(iii) P.d.q. $\Re$ es una relación transitiva

En efecto

Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ y $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ en $\mathbb{R}_2[x]$, tal que.

$$p(x)\ \Re\ q(x) \wedge q(x)\ \Re\ f(x)$$

$$\begin{aligned} p(x)\ \Re\ q(x) &\iff p(x) - q(x) = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 \in \mathbb{U} \\ &\iff (a_0 - b_0) - (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} q(x)\ \Re\ f(x) &\iff q(x) - f(x) = b_0 - c_0 + (b_1 - c_1)x + (b_2 - c_2)x^2 \in \mathbb{U} \\ &\iff (b_0 - c_0) - (b_1 - c_1) + (b_2 - c_2) = 0 \qquad (**) \end{aligned}$$

De (*) y (**) sigue que;

$$\begin{aligned} 0 &= (a_0 - b_0) - (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (b_0 - c_0) - (b_1 - c_1) + (b_2 - c_2) \\ &= a_0 - b_0 - a_1 + b_1 + a_2 - b_2 + b_0 - c_0 - b_1 + c_1 + b_2 - c_2 \\ &= a_0 - a_1 + a_2 - c_0 + c_1 - c_2 \\ &= (a_0 - c_0) - (a_1 - c_1) + (a_2 - c_2) \end{aligned}$$

Así que $p(x) - f(x) = (a_0 - c_0) + (a_1 - c_1)x + (a_2 - c_2)x^2 \in \mathbb{U}$ y $p(x)\Re f(x)$. Luego $\Re$ es una relación transitiva, y por tanto $\Re$ es una relación de equivalencia.

(b) Demuestre que $\overline{1 + 2x + x^2} = \mathbb{U}$

En efecto

$$\begin{aligned} p(x) \in \overline{1 + 2x + x^2} &\iff p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge p(x)\Re(1 + 2x + x^2) \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (a_0 + a_1x + a_2x^2)\Re(1 + 2x + x^2) \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge (a_0 - 1) - (a_1 - 2) + (a_2 - 1) = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_0 - 1 - a_1 + 2 + a_2 - 1 = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \wedge p(x) \in \mathbb{U} \\ &\Downarrow \\ \overline{1 + 2x + x^2} &= \mathbb{U} \end{aligned}$$

(2) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, 3z)$

(a) Demuestre que f es una biyección

Solución

(i) P.d.q f es inyectiva.

Supongamos que

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$$

$$\begin{array}{rcl}
f(x_1,y_1,z_1)=f(x_2,y_2,z_2) & \Longleftrightarrow & (x_1+y_1+z_1,x_1-y_1+z_1,3z_1)=(x_2+y_2+z_2,x_2-y_2+z_2,3z_2)\\
& \Longleftrightarrow & \left.\begin{array}{rcl} x_1+y_1+z_1 & = & x_2+y_2+z_2\\ x_1-y_1+z_1 & = & x_2-y_2+z_2\\ 3z_1 & = & 3z_2 \end{array}\right|\\
& \Downarrow & \\
z_1=z_2 & \wedge & \left.\begin{array}{rcl} x_1+y_1 & = & x_2+y_2\\ x_1-y_1 & = & x_2-y_2 \end{array}\right|\\
& \Downarrow & \\
z_1=z_2 & \wedge & x_1=x_2\wedge y_1=y_2\\
& \Downarrow & \\
(x_1,y_1,z_1) & = & (x_2,y_2,z_2)
\end{array}$$

Luego f es inyectiva

(ii) P.d.q f es sobreyectiva.

Sabemos que $Img(f)\subset\mathbb{R}^3$, porque f es bien definida.

Para mostrar la inclusión que falta $\mathbb{R}^3\subset Img(f)$, debemos resolver la ecuación.

$$f(x,y,z)=(a,b,c),\ \text{donde } p=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \text{ es dado. Así que}$$

$$\begin{array}{rcl}
f(x,y,z)=(a,b,c) & \Longleftrightarrow & \left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a\\ x-y+z & = & b\\ 3z & = & c \end{array}\right|\\
& \Downarrow & \\
z=\dfrac{c}{3} & \wedge & \left.\begin{array}{rcl} x+y & = & a-\dfrac{c}{3}\\ \\ x-y & = & b-\dfrac{c}{3} \end{array}\right|\\
& \Downarrow & \\
z=\dfrac{c}{3} & \wedge & x=\dfrac{3a+3b-2c}{6}\wedge y=\dfrac{a-b}{2}\\
& \Downarrow & \\
f\left(\dfrac{3a+3b-2c}{6},\dfrac{a-b}{2},\dfrac{c}{3}\right) & = & (a,b,c)\qquad(\star)
\end{array}$$

(b) Determine explícitamente f^{-1}

Solución: De $(\star)$ sigue directamente que:

$$f^{-1}(x,y,z)\quad=\quad\left(\frac{3x+3y-2z}{6},\frac{x-y}{2},\frac{z}{3}\right)$$

(3) Sean $f:A\longmapsto B$ y $g:B\longmapsto C$ dos funciones.

(i) Demuestre que $g\circ f$ inyectiva $\Longrightarrow f$ inyectiva

Solución

$$\begin{aligned} f(x)=f(y) &\implies g(f(x))=g(f(y)) \\ &\implies (g\circ f)(x)=(g\circ f)(y) \\ &\implies x=y \qquad (\text{ pues, } (g\circ f) \text{ es inyectiva })\end{aligned}$$

Luego, f es una función inyectiva.

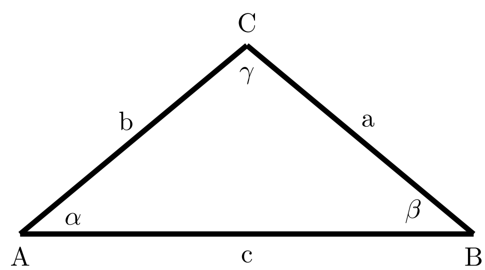
(ii) Demuestre que $g\circ f$ sobreyectiva $\Longrightarrow g$ sobreyectiva

Solución

Sabemos que $Img(g)\subset C$. Así que para mostrar que $C\subset Img(g)$, debemos resolver la ecuación $g(b)=c$, para c dado.

Ahora si $c\in C$ es dado entonces como $g\circ f$ sobreyectiva, existe $a\in A$ tal que $(g\circ f)(a)=c$. Por tanto $g(\underbrace{f(a)}_{b})=c$

(4) En el ΔABC de la figura:



Demuestre que si se verifican simultáneamente las propiedades :

$$\left.\begin{array}{ll}(i) & a^2=\dfrac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}\\ (ii) & sen\beta\cdot sen\gamma=\dfrac{3}{4}\end{array}\right\}\text{ entonces el } \Delta ABC \text{ es equilátero.}$$

Solución

P.d.q. $a=b=c$ ó que los ángulos $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$

(a) De la condición (i) sigue que:

$$\begin{aligned} a^2=\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} &\implies b^3+c^3-a^3=a^2b+a^2c-a^3 \\ &\implies (b+c)(b^2-bc+c^2)=a^2(b+c) \\ &\implies a^2=b^2-bc+c^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

(b) Del teorema del coseno sigue que:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) tenemos que;

$$\begin{aligned}
b^2 - bc + c^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
&\Downarrow \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2} \\
&\Downarrow \\
\alpha &= 60^\circ
\end{aligned}$$

(c) Como $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$ entonces $\cos\alpha = \cos(180^\circ - (\beta + \gamma))$. Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \cos(180^\circ - (\beta+\gamma)) \\
&= \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1}\cos(\beta+\gamma) + \underbrace{\sin 180^\circ}_{0}\sin(\beta+\gamma) \\
&= -\cos(\beta+\gamma) \\
&= \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma \qquad (3)
\end{aligned}$$

(d) Como $sen\beta \cdot sen\gamma = \dfrac{3}{4}$
entonces sustituyendo en (3) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{3}{4} - \cos\beta\cos\gamma \\
&\Downarrow \\
\cos\beta\cos\gamma &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Así que.

$$\begin{aligned}
\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Pero, $\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma = \cos(\gamma - \beta)$. Así que

$$\cos(\gamma - \beta) = 1 \Longrightarrow \gamma - \beta = 0 \Longrightarrow \gamma = \beta$$

Finalmente, $\alpha = 60^\circ$, $\gamma + \beta = 120^\circ$ y $\gamma = \beta$ entonces $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ y ΔABC es un triángulo equilatero.