

Solución Pep N° 1 de Álgebra¹
Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
08 de Mayo del 2004

(1) Si p y q son proposiciones entonces demuestre usando una tabla de verdad que la proposición:

$$(p \Rightarrow q) \iff [(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)] \quad \text{Es una Tautología}$$

Solución

Construyamos la tabla de verdad.

p	q	r	$\sim q$	$(p \Rightarrow q)$	$\iff$	$p \wedge \sim q$	$\Rightarrow$	$r \wedge \sim r$
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0

Luego, la proposición es una tautología.

(2) Sea $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\} \subset \mathbb{R}$, tal que:

(a) $a_i = i$ para $i = 1, 2$

(b) $a_s = \sum_{i=1}^{s-1} a_i \quad (s \geq 3)$

Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula

$$F(n) : a_n = 3 \cdot 2^{n-3} \text{ es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N}; n \geq 3)$$

Solución

Etapla 1 P.d.q. $F(3)$ es verdadera.

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3 = 3 \cdot 2^{3-3}$$

Etapla 2 Hipótesis de Inducción

¹Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Supongamos que $F(n)$ es verdadera. e.e
 $a_n = 3 \cdot 2^{n-3}$ (H)

Etapa 3 Tesis de Inducción

P.d.q. $F(n+1)$ es verdadera. e.e.

p.d.q.

$$a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-2}$$

En efecto

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{i=1}^n a_i \\ &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ &\stackrel{(H)}{=} 3 \cdot 2^{n-3} + 3 \cdot 2^{n-4} + 3 \cdot 2^{n-5} + 3 \cdot 2^{n-6} + 3 \cdot 2^{n-7} + \dots + 3 + 3 \\ &= 3(2^{n-3} + 2^{n-4} + 2^{n-5} + 2^{n-6} + 2^{n-7} + \dots + 1) + 3 \\ &= 3 \cdot \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} + 3 \quad (\text{suma de una progresión geométrica}) \\ &= 3 \cdot 2^{n-2} - 3 + 3 \\ &= 3 \cdot 2^{n-2} \end{aligned}$$

Así que, $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

(3) Si $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ tal que satisface las siguientes propiedades:

- (a) A es una Progresión Aritmética
- (b) a, b y c son los coeficientes de una ecuación cuadrática. es decir $ax^2 + bx + c = 0$ (*)
- (c) $\frac{1}{3}(a + b + c) = x_1 + x_2$
- (d) $x_1 \cdot x_2 + 7 = b$. Donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática (*)

entonces determine los números a, b y c .

Solución

Etapa 1 sea $A = \{a, b, c\}$ el conjunto pedido.

Etapa 2 Datos

(i) A es una progresión aritmética si:

$$a = b - d \quad \text{y} \quad c = b + d$$

Donde d es la diferencia de la progresión aritmética.

(ii) Las raíces de una ecuación de segundo grado son de la forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así que,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} -\frac{b}{a} &= \frac{1}{3}(b - d + b + b + d) \\ &\Downarrow \\ -\frac{b}{a} &= b \\ &\Downarrow \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Luego,

$$b = d - 1 \quad \text{y} \quad c = 2d - 1$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} + 7 &= b \\ &\Downarrow \\ \frac{2d-1}{-1} + 7 &= d - 1 \\ &\Downarrow \\ 8 - 2d &= d - 1 \\ &\Downarrow \\ d &= 3 \end{aligned}$$

Etapa 3 Finalmente sustituyendo tenemos que:

$$a = -1; \quad b = 2 \quad \text{y} \quad c = 5$$

(4) Suponga que:

(i) $A = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ y $B = \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$, son dos desarrollos binomiales con $(n \in \mathbb{N})$.

(ii) $t_k(A)$ es el k -ésimo término de A y $t_k(B)$ es el k -ésimo término de B .

Demuestre que

$$t_k(A) = t_k(B) \implies n \text{ es un número par}$$

Solución

Etapa 1 P.d.q. que $n = 2 \cdot s$, para algún entero s .

Etapa 2 Datos

(i) Para el binomio A tenemos que:

$$\begin{aligned} t_k(A) &= \binom{n}{k-1} (x^2)^{n-(k-1)} \cdot \frac{1}{x^{k-1}} \\ &= \binom{n}{k-1} (x)^{2n-3(k-1)} \end{aligned}$$

(ii) Para el binomio B tenemos que:

$$\begin{aligned} t_k(B) &= \binom{n}{k-1} (x^3)^{n-(k-1)} \cdot \frac{1}{(x^2)^{k-1}} \\ &= \binom{n}{k-1} (x)^{3n-5(k-1)} \end{aligned}$$

(iii) Además,

$$\begin{aligned} t_k(A) = t_k(B) &\iff \binom{n}{k-1} (x)^{2n-3(k-1)} = \binom{n}{k-1} (x)^{3n-5(k-1)} \\ &\quad \Downarrow \\ (x)^{2n-3(k-1)} &= (x)^{3n-5(k-1)} \\ &\quad \Downarrow \\ 2n - 3(k-1) &= 3n - 5(k-1) \\ &\quad \Downarrow \\ n &= 2 \underbrace{(k-1)}_s \end{aligned}$$

Así que n es par.