

Profesor Ricardo Santander Baeza
Solución Prueba acumulativa semestral
de Álgebra¹ Ingeniería Civil
14 de Agosto del 2004

(1) Demuestre usando Inducción Matemática que es verdadera en los naturales la fórmula proposicional

$$F(n) : (n \in \mathbb{N} : n \text{ impar}) \implies n(n^2 - 1) \text{ es divisible por } 24.$$

Solución

Etapla 1. P.d.q. $F(1)$ es verdadera.

En efecto

$$\left. \begin{aligned} 1(1^2 - 1) &= 1 \cdot 0 \\ &= 0 \\ &= 24 \cdot 0 \end{aligned} \right\} \implies 1(1^2 - 1) = 24 \cdot 0 \implies F(1) \text{ es verdadera.}$$

Etapla 2. Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera. Esto es

$$\begin{aligned} (n \in \mathbb{N} : n \text{ impar}) &\implies n(n^2 - 1) \text{ es divisible por } 24 \\ &\Downarrow \\ (\exists s; s \in \mathbb{N}) \wedge (\exists r; r \in \mathbb{N}) &: n = (2s - 1) \wedge (2s - 1)((2s - 1)^2 - 1) = 24 \cdot r \\ &\Downarrow \\ (\exists s; s \in \mathbb{N}) \wedge (\exists r; r \in \mathbb{N}) &: n = (2s - 1) \wedge (2s - 1)(4s^2 - 4s) = 24 \cdot r \\ &\Downarrow \\ (\exists s; s \in \mathbb{N}) \wedge (\exists r; r \in \mathbb{N}) &: n = (2s - 1) \wedge 8s^3 - 12s^2 + 4s = 24 \cdot r \quad (*) \end{aligned}$$

Etapla 3. P.d.q. $F(n + 2)$ es verdadera. Esto es,

$$\begin{aligned} \text{p.d.q } (n + 2 \in \mathbb{N} : n \text{ impar}) &\implies (n + 2)((n + 2)^2 - 1) \text{ es divisible por } 24 \\ &\Downarrow \\ \text{p.d.q } (\exists u; u \in \mathbb{N}) &: n = (2s - 1) \wedge (n + 2)((n + 2)^2 - 1) = 24 \cdot u \\ &\Downarrow \\ \text{p.d.q } (\exists u; u \in \mathbb{N}) &: n = (2s - 1) \wedge (2s + 1)((2s + 1)^2 - 1) = 24 \cdot u \\ &\Downarrow \\ \text{p.d.q } (\exists u; u \in \mathbb{N}) &: n = (2s - 1) \wedge (2s + 1)(4s^2 + 4s) = 24 \cdot u \\ &\Downarrow \\ \text{p.d.q } (\exists u; u \in \mathbb{N}) &: n = (2s - 1) \wedge 8s^3 + 12s^2 + 4s = 24 \cdot u \quad (**) \end{aligned}$$

Entonces dividiendo (**) por (*) tenemos que

¹Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

$$\begin{array}{rcl}
 8s^3 + 12s^2 + 4s & : & 8s^3 - 12s^2 + 4s = 1 \\
 (-) & & \\
 8s^3 - 12s^2 + 4s & & \\
 \hline
 & & 24s^2
 \end{array}$$

Así que,

$$\begin{aligned}
 8s^3 + 12s^2 + 4s &= 1 \cdot (8s^3 - 12s^2 + 4s) + 24s^2 \\
 &\stackrel{(*)}{=} 24r + 24s^2 \\
 &= 24 \underbrace{(r + s^2)}_u
 \end{aligned}$$

Luego, $F(n+2)$ es verdadera y por tanto la fórmula proposicional $F(n)$ es verdadera, para cada número natural impar.

(2.a) Sea $A = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ tal que:

(a) A es una progresión aritmética.

(b) $a + b \neq 0, a - b \neq 0, a + c \neq 0$ y $a - c \neq 0$

Demuestre que

$$\frac{a(a-c)}{(a-b)(a+c)} = 1$$

Solución

$$\begin{aligned}
 A \text{ es una progresión aritmética} &\iff \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \\
 &\iff \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \\
 &\iff \frac{2}{b} = \frac{a+c}{ac} \\
 &\iff b = \frac{2ac}{a+c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego, } \frac{a(a-c)}{(a-b)(a+c)} &= \frac{a(a-c)}{\left(a - \frac{2ac}{a+c}\right)(a+c)} \\
 &= \frac{a(a-c)}{\left(\frac{a(a+c)-2ac}{a+c}\right)(a+c)} \\
 &= \frac{a(a-c)}{(a^2+ac-2ac)} \\
 &= \frac{a(a-c)}{(a^2-ac)} \\
 &= \frac{a(a-c)}{a(a-c)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(2.b) Considere el desarrollo binomial

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^4}\right)^m \quad (m \in \mathbb{N}) \quad (*)$$

Si existe un término en $(*)$ que contiene a x^{-6t} , para algún $t \in \mathbb{N}$ entonces demuestre que m debe ser un múltiplo de 3.

Solución

Etapas 1 Supongamos que existe el término pedido, y que es de la forma t_{r+1}

Etapas 2 Datos.

$$(i) \quad t_{r+1} \text{ es el término pedido si y sólo si } t_{r+1} = \binom{m}{r} (x^2)^{m-r} \left(\frac{-1}{x^4}\right)^r$$

Es decir,

$$\begin{aligned} t_{r+1} &= \binom{m}{r} x^{(2m-2r)} \left(\frac{(-1)^r}{x^{4r}}\right) \\ &= \binom{m}{r} (-1)^r x^{(2m-6r)} \end{aligned}$$

$$(ii) \quad t_{r+1} \text{ contiene a } x^{-6t} \text{ si y sólo si } x^{(2m-6r)} = x^{(-6t)}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x^{(2m-6r)} = x^{(-6t)} &\iff 2m - 6r = -6t \\ &\iff 2m = 6r - 6t \\ &\iff m = 3r - 3t \\ &\iff m = 3(r - t) \end{aligned}$$

Luego, m es un múltiplo de 3.

(3) Considere el homomorfismo de grupos $h: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que $h(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$.

(a) Determine $\ker(h)$

Solución

$$\begin{aligned} u \in \ker(h) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge h(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\iff u = (x, y, z) \wedge h(x, y, z) = (0, 0) \\ &\iff u = (x, y, z) \wedge (x + y + z, x - y - z) = (0, 0) \\ &\iff u = (x, y, z) \quad \wedge \quad \underline{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{array}} \\ &\iff u = (x, y, z) \quad \wedge \quad [x = 0 \wedge y + z = 0] \quad (\text{sumando y restando ambas ecuaciones}) \\ &\iff \ker(h) = \{(x, y, z) \mid x = 0 \wedge y + z = 0\} \end{aligned}$$

(b) Define en $\mathbb{R}^3$ la relación $\mathfrak{R}$ como sigue: Para $u = (x, y, z)$ y $u' = (x', y', z')$ diremos que

$$u\mathfrak{R}u' \iff (u - u') = (x - x', y - y', z - z') \in \ker(h)$$

Demuestre que $\mathfrak{R}$ es una relación de equivalencia

Solución

(i) P.d.q. $\mathfrak{R}$ es reflexiva.

Esto es p.d.q. $[u\mathfrak{R}u \ (\forall u; u \in \mathbb{R}^3)]$ equivalentemente p.d.q. $(u - u) \in \ker(h)$

Pero, $(\forall u; u \in \mathbb{R}^3)$ tenemos que $u - u = (0, 0, 0) \wedge [0 = 0 \wedge 0 + 0 = 0]$.

Así que $(u - u) \in \ker(h)$ y $u\mathfrak{R}u \ (\forall u; u \in \mathbb{R}^3)$ y $\mathfrak{R}$ es una relación reflexiva.

(ii) P.d.q. $\mathfrak{R}$ es simétrica. Esto es

p.d.q. $[u\mathfrak{R}u' \implies u'\mathfrak{R}u]$ equivalentemente p.d.q. $(u - u') \in \ker(h) \implies (u' - u) \in \ker(h)$
En efecto

Si $u = (x, y, z)$ y $u' = (x', y', z')$ y $u\mathfrak{R}u'$ entonces

$$\begin{aligned} u\mathfrak{R}u' &\implies (u - u') \in \ker(h) \\ &\implies (x - x', y - y', z - z') \in \ker(h) \\ &\implies x - x' = 0 \wedge y - y' + z - z' = 0 \\ &\implies x' = x \wedge y + z = y' + z' \\ &\implies x' - x = 0 \wedge y' - y + z' - z = 0 \\ &\implies (x' - x, y' - y, z' - z) \in \ker(h) \\ &\implies (u' - u) \in \ker(h) \\ &\implies u'\mathfrak{R}u \end{aligned}$$

Así que $\mathfrak{R}$ es una relación simétrica

(iii) P.d.q. $\mathfrak{R}$ es transitiva. Esto es

p.d.q. $[(u\mathfrak{R}v) \wedge (v\mathfrak{R}w) \implies u\mathfrak{R}w]$ equivalentemente

p.d.q. $(u - v) \in \ker(h) \wedge (v - w) \in \ker(h) \implies (u - w) \in \ker(h)$

En efecto

Si $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ entonces

$$\begin{aligned}
(u\Re v) \wedge (v\Re w) &\implies (u - v) \in \ker(h) \wedge (v - w) \in \ker(h) \\
&\implies (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3) \in \ker(h) \wedge (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3) \in \ker(h) \\
&\implies [(u_1 - v_1) = 0 \wedge (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) = 0] \wedge [(v_1 - w_1) = 0 \wedge (v_2 - w_2) + (v_3 - w_3) = 0] \\
&\implies (u_1 - v_1) + (v_1 - w_1) = 0 \wedge (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + (v_2 - w_2) + (v_3 - w_3) = 0 \\
&\implies (u_1 - v_1) + (v_1 - w_1) = 0 \wedge (u_2 - v_2) + (v_2 - w_2) + (u_3 - v_3) + (v_3 - w_3) = 0 \\
&\implies (u_1 - w_1) = 0 \wedge (u_2 - w_2) + (u_3 - w_3) = 0 \\
&\implies (u_1 - w_1, u_2 - w_2, u_3 - w_3) \in \ker(h) \\
&\implies (u - w) \in \ker(h) \\
&\implies u\Re w
\end{aligned}$$

Así que $\Re$ es una relación transitiva y por ende es una relación de equivalencia.

(4) Sea $h : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mapsto \mathbb{R}_3[x]$ tal que $h \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{21}x + a_{12}x^2 + a_{22}x^3$.

(a) Demuestre que h es un Isomorfismo de grupos.

Solución

Etapla 1. P.d.q. h es un homomorfismo de grupos. Esto es, p.d.q si $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces $h(A + B) = h(A) + h(B)$

$$\begin{aligned}
A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \iff B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
\Downarrow \\
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \\
\Downarrow \\
h(A + B) &= h \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \\
&= a_{11} + b_{11} + (a_{21} + b_{21})x + (a_{12} + b_{12})x^2 + (a_{22} + b_{22})x^3 \\
&= [a_{11} + a_{21}x + a_{12}x^2 + a_{22}x^3] + [b_{11} + b_{21}x + b_{12}x^2 + b_{22}x^3] \\
&= h \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
&= h(A) + h(B)
\end{aligned}$$

Luego, h es un homomorfismo de grupos.

Etapla 2. P.d.q h es inyectiva. Para ello, basta mostrar que $\ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Sea $A \in \ker(h)$ entonces

$$A \in \ker(h) \iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge h(A) = e_{\mathbb{R}_3[x]}$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge h \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{11} + a_{21}x + a_{12}x^2 + a_{22}x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{11} = 0 \wedge a_{21} = 0 \wedge a_{12} = 0 \wedge a_{22} = 0$$

$$\iff A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego, h es inyectivo.

Etapla 3. P.d.q. h es sobreyectiva. Esto es p.d.q. $\text{Img}(h) = \mathbb{R}_3[x]$, equivalentemente hay que mostrar que $\text{Img}(h) \subset \mathbb{R}_3[x] \wedge \mathbb{R}_3[x] \subset \text{Img}(h)$.

Pero por definición de función tenemos que $\text{Img}(h) \subset \mathbb{R}_3[x]$, así que basta mostrar que $\mathbb{R}_3[x] \subset \text{Img}(h)$.

Lo anterior ocurre si y sólo si tiene solución en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, la ecuación. $h(A) = p(x)$, para $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ dado.

Entonces veamos si una tal ecuación tiene o no solución.

Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ dado, y planteemos la ecuación.

$$\begin{aligned} (\exists A; A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)) : h(A) = p(x) &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge h \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_{11} + a_{21}x + a_{12}x^2 + a_{22}x^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge a_0 = a_{11} \wedge a_1 = a_{21} \wedge a_2 = a_{12} \wedge a_3 = a_{22} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} \\ &\quad \Downarrow \\ h(A) = p(x) &\iff A = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} \wedge h \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \end{aligned}$$

Luego h es sobreyectiva y por tanto un isomorfismo de grupos.

(b) Determine h^{-1}

Solución

De la parte anterior del ejercicio sigue que;

$$h^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

En efecto.

$$\begin{aligned} (h \circ h^{-1})(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) &= h(h^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)) \\ &= h \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \end{aligned}$$

Así que $h \circ h^{-1} = 1_{\mathbb{R}_3[x]}$

Recíprocamente

$$\begin{aligned} (h^{-1} \circ h) \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} &= h^{-1} \left(h \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= h^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así que $h^{-1} \circ h = 1_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}$