Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución del Examen 2 de Álgebra[1] - Ingeniería Civil
Profesor Ricardo Santander Baeza
02 de marzo del 2005

1. Dado el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & bcy & + & z & = & 1 \\ x & + & cy & + & b^2z & = & b \\ x & + & by & + & c^2z & = & c \end{array}\right| \qquad (*)$$

(a) Determine el conjunto: $S = \{(b,c) \in \mathbb{R}^2 \mid (*) \text{ tiene solución única}\}$

Solución

Etapa 1. $(*)$ es equivalente a la notación matricial.

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & bcy & + & z & = & 1 \\ x & + & cy & + & b^2z & = & b \\ x & + & by & + & c^2z & = & c \end{array}\right| \quad (*) \iff \begin{pmatrix} 1 & bc & 1 \\ 1 & c & b^2 \\ 1 & b & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Etapa 2. Escalonamos la matriz ampliada asociada al sistema.

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & bc & 1 & 1 \\ 1 & c & b^2 & b \\ 1 & b & c^2 & c \end{pmatrix} \begin{array}{c} (L_2 \longrightarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \longrightarrow L_3 - L_1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & bc & 1 & 1 \\ 0 & c(1-b) & b^2-1 & b-1 \\ 0 & b(1-c) & c^2-1 & c-1 \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

Caso 1: $1 - b = 0$ e.e $b = 1$.

En este caso, después de aplicar la condición descrita encima a $(\star)$, tenemos que A_a es equivalente a:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-c) & c^2-1 & c-1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho(A) < 3$$

En cualquier caso, del análisis anterior sigue que para $b = 1$ y $c = 1(*)$ no tiene solución única.

Caso 2: $b \neq 1$ y $c \neq 1$

En este caso, podemos seguir escalonando A_a:

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

$$\begin{pmatrix} 1 & bc & 1 & 1 \\ 0 & c(1-b) & b^2-1 & b-1 \\ 0 & b(1-c) & c^2-1 & c-1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} L_2 \longrightarrow \dfrac{1}{1-b} L_2 \\ L_3 \longrightarrow \dfrac{1}{1-c} L_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & bc & 1 & 1 \\ 0 & c & -1-b & -1 \\ 0 & b & -1-c & -1 \end{pmatrix}$$

$$(L_2 \longrightarrow L_2 - L_3) \quad \begin{pmatrix} 1 & bc & 1 & 1 \\ 0 & c-b & c-b & 0 \\ 0 & b & -1-c & -1 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Del análisis de $(**)$ sigue que debemos agregar la condición $b \neq c$.

Luego, para $b \neq 1$ y $c \neq 1$ y $b \neq c$ tenemos que A_a es equivalente a la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & bc & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & -1-c & -1 \end{pmatrix} \qquad (***)$$

Seguimos escalonando C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & bc & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b & -1-c & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (L_1 \longrightarrow L_1 - bcL_2) \\ (L_3 \longrightarrow L_3 - bL_2) \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-bc & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-b-c & -1 \end{pmatrix}$$

Si además $-1-b-c \neq 0$ $\quad \left(L_3 \longrightarrow \dfrac{1}{-1-b-c} L_3 \right) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-bc & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{1+b+c} \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} (L_1 \longrightarrow L_1 - (1-bc)L_3) \\ (L_2 \longrightarrow L_2 - L_3) \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{b+c+bc}{1+b+c} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-1}{1+b+c} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{1+b+c} \end{pmatrix}$$

Luego $S = \{(b,c) \in \mathbb{R}^2 \mid b \neq 1 \wedge c \neq 1 \wedge b \neq c \wedge 1+b+c \neq 0\}$

(b) Exhiba la solución obtenida en el punto anterior.

Solución

La solución obtenida es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b+c+bc}{1+b+c} \\ \dfrac{-1}{1+b+c} \\ \dfrac{1}{1+b+c} \end{pmatrix}, \text{ tal que } (b \neq 1 \wedge c \neq 1 \wedge b \neq c \wedge 1+b+c \neq 0)$$

2. Dados los subconjuntos de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$: $\mathbb{W}_1 = \left\{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\right\}$ y $\mathbb{W}_2 = \left\{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = -A^t\right\}$.

(a) Muestre que $\mathbb{W}_i \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ para $i = 1, 2$

Solución

$$\begin{array}{rcl}
A \in \mathbb{W}_1 & \Longleftrightarrow & A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ A = A^t \\
& \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t \\
& \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ a_{12} = a_{21} \\
& \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \ : \ (a_{11}, a_{12}, a_{22}) \in \mathbb{R}^3 \\
& \Longleftrightarrow & A = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ (a_{11}, a_{12}, a_{22}) \in \mathbb{R}^3 \\
& \Downarrow & \\
\mathbb{W}_1 & = & \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \\
& \Downarrow & \\
\mathbb{W}_1 & \leq & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)
\end{array}$$

Análogamente

$$\begin{array}{rcl}
A \in \mathbb{W}_2 & \Longleftrightarrow & A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ A = -A^t \\
& \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^t \\
& \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ a_{11} = a_{22} = 0 \ \wedge \ a_{21} = -a_{12} \\
& \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} \ : \ a_{12} \in \mathbb{R} \\
& \Longleftrightarrow & A = a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \Downarrow & \\
\mathbb{W}_2 & = & \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \\
& \Downarrow & \\
\mathbb{W}_2 & \leq & \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)
\end{array}$$

(b) Demuestre que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$

En efecto

Etapa 1. $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Etapa 2. Así que para $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} B &= \underbrace{b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{W}_1} + \underbrace{b_4 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{W}_2} \\ &\Downarrow \\ \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) &= \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 \end{aligned}$$

Etapa 3. $B \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2 \Longleftrightarrow B = B^t \wedge B = -B^t \Longleftrightarrow B = -B \Longleftrightarrow B = (0)$

Luego, $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$

3. Construya, (si es posible) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

   (a) $(\mathbb{R}^4)_{-1} = \{(1,1,1,1), (-1,1,-1,1)\}$

   (b) T isomorfismo

   (c) T diagonalizable

   Solución

   Etapa 1. Sabemos que para definir una transformación lineal, basta hacerlo en una base, y después "extenderla por linealidad". Así que partimos construyendo una base para $\mathbb{R}^4$.

$$u \in (\mathbb{R}^4)_{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathbb{R}^4 \ \wedge \ T(u) = (-1) \cdot u = -u$$

   Así que tenemos que

   (i) $T(1,1,1,1) = (-1,-1,-1,-1)$

   (ii) $T(-1,1,-1,1) = (1,-1,1,-1)$

   (iii) $\alpha = \{(1,1,1,1), (-1,1,-1,1)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

En efecto

$$\begin{aligned}
a_1(1,1,1,1)+a_2(1,-1,-1,1) &= (0,0,0,0)\\
&\Downarrow\\
(a_1+a_2, a_1-a_2, a_1-a_2, a_1+a_2) &= (0,0,0,0)\\
&\Downarrow\\
a_1+a_2 &= 0\\
a_1-a_2 &= 0\\
&\Downarrow\\
a_1 &= -a_2\\
a_1 &= a_2\\
&\Downarrow\\
a_1 &= 0\\
a_2 &= 0
\end{aligned}$$

(iv) Completamos α a una base de $\mathbb{R}^4$

Sea $\beta = \{(1,1,1,1), (-1,1,-1,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0)\}$, β es una base de $\mathbb{R}^4$

En efecto

$$\begin{aligned}
a_1(1,1,1,1)+a_2(1,-1,-1,1)+a_3(1,0,0,0)+a_4(0,1,0,0) &= (0,0,0,0)\\
&\Downarrow\\
(a_1+a_2+a_3, a_1-a_2+a_4, a_1-a_2, a_1+a_2) &= (0,0,0,0)\\
&\Downarrow\\
a_1+a_2+a_3 &= 0\\
a_1-a_2+a_4 &= 0\\
a_1-a_2 &= 0\\
a_1+a_2 &= 0\\
&\Downarrow\\
a_1=a_2=a_3=a_4 &= 0
\end{aligned}$$

Etapa 2. Definamos T en β, para que cumpla las condiciones.

- Así que por ejemplo podemos definir T en la base β como sigue, (entre otras):

$$\begin{aligned}
T(1,1,1,1) &= (-1,-1,-1,-1)\\
T(-1,1,-1,1) &= (1,-1,1,-1)\\
T(1,0,0,0) &= (1,0,0,0)\\
T(0,1,0,0) &= (0,1,0,0)
\end{aligned}$$

- Ahora extendemos por linealidad

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,w) &= a_1(1,1,1,1)+a_2(-1,1,-1,1)+a_3(1,0,0,0)+a_4(0,1,0,0)\\
&\Downarrow\\
a_1-a_2+a_3 &= x\\
a_1+a_2+a_4 &= y\\
a_1-a_2 &= z\\
a_1+a_2 &= w\\
&\Downarrow\\
a_1 &= \frac{z+w}{2}\\
a_2 &= \frac{w-z}{2}\\
a_3 &= x-z\\
a_4 &= y-w\\
&\Downarrow\\
(x,y,z,w) &= \frac{z+w}{2}(1,1,1,1)+\frac{w-z}{2}(-1,1,-1,1)+(x-z)(1,0,0,0)+(y-w)(0,1,0,0)\\
&\Downarrow\\
T(x,y,z,w) &= \frac{z+w}{2}T(1,1,1,1)+\frac{w-z}{2}T(-1,1,-1,1)+(x-z)T(1,0,0,0)+(y-w)T(0,1,0,0)\\
&= \frac{z+w}{2}(-1,-1,-1,-1)+\frac{w-z}{2}(1,-1,1,-1)+(x-z)(1,0,0,0)+(y-w)(0,1,0,0)\\
&= \left(\frac{-z-w}{2}+\frac{w-z}{2}+x-z,\frac{-z-w}{2}-\frac{w-z}{2}+y-w,\frac{-z-w}{2}+\frac{w-z}{2},\frac{-z-w}{2}-\frac{w-z}{2}\right)\\
&= (x-2z,y-2w,-z,-w)
\end{aligned}
$$

- Como β es una base de vectores propios de $\mathbb{R}^4$ entonces por construcción T es diagonalizable, y

$$
[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(T)=1\neq 0 \Longrightarrow T \text{ Isomorfismo}
$$

4. Sea $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $T(a+bx+cx^2)=(a-b+c)+(a+b-c)x+bx^2$. Determine en $\mathbb{R}$ los valores y vectores propios de T

Solución

Etapa 1. Valores Propios

1. Determinamos el polinomio característico

$$
\begin{aligned}
[T]_{p(2)}^{p(2)} &= ([T(1)]_{p(2)}\ [T(x)]_{p(2)}\ [T(x^2)]_{p(2)}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
P_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} (\lambda-1) & 1 & -1 \\ -1 & (\lambda-1) & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda \det \begin{pmatrix} (\lambda-1) & 1 \\ -1 & (\lambda-1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} (\lambda-1) & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \lambda((\lambda-1)^2+1) + (\lambda-1) - 1 \\
&= \lambda((\lambda^2-2\lambda+1+1) + (\lambda-1) - 1 \\
&= \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda) + \lambda - 2 \\
&= \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 2
\end{aligned}
$$

2. Anulamos $P_T(\lambda)$

$$
\begin{aligned}
P_T(\lambda) = 0 &\iff \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \\
&\iff (\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+2) \\
&\Longrightarrow \lambda - 1 = 0 \ \vee\ \lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda = 1 \ \vee\ \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \notin \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Así que T posee un único valor propio: V.P=$\{1\}$

Etapa 2. Vectores propios.

$$
\begin{aligned}
p(x) \in (\mathbb{R}_2[x])_1 &\iff p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \wedge T(p(x)) = p(x) \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge (a_0 - a_1 + a_2) + (a_0 + a_1 - a_2)x + a_1x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge \left.\begin{array}{lcl} a_0 - a_1 + a_2 & = & a_0 \\ a_0 + a_1 - a_2 & = & a_1 \\ a_1 & = & a_2 \end{array}\right| \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \wedge a_0 = a_1 = a_2 \\
&\iff p(x) = a_0 + a_0x + a_0x^2 \\
&\iff p(x) = a_0(1 + x + x^2) \\
&\Downarrow \\
(\mathbb{R}_2[x])_1 &= \langle\{1 + x + x^2\}\rangle
\end{aligned}
$$