Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Profesor Ricardo Santander Baeza
Solución del Examen de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
14 de Diciembre del 2004

(1) Considere $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(x,y,z) = (ux+y, uy+z, uz)$, para $u \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Demuestre usando Inducción matemática que la fórmula.

$$T^n(x,y,z) = \left(u^n x + nu^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}z, u^n y + nu^{n-1}z, u^n z\right)$$

Es verdadera, $(\forall n; n \in \mathbb{N})$, donde $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n-veces)

Solución

1. $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \Longrightarrow T^n \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

2. $[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$ y $\left([T]_{c(3)}^{c(3)}\right)^n = \begin{pmatrix} u^n & nu^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}u^{n-2} \\ 0 & u^n & nu^{n-1} \\ 0 & 0 & u^n \end{pmatrix}$, para $n \in \mathbb{N}$

3. Luego, demostrar por inducción matemática que:

$$T^n(x,y,z) = \left(u^n x + nu^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}\;u^{n-2}z, u^n y + nu^{n-1}z, u^n z\right)$$

es equivalente a mostrar que

$$\begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} u^n & nu^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\;u^{n-2} \\ 0 & u^n & nu^{n-1} \\ 0 & 0 & u^n \end{pmatrix}, (\forall n; n \in \mathbb{N}) \qquad (*)$$

Así que, procedemos a demostrar por inducción matemática:

Etapa 1. Si $n = 1$ entonces:

$$\begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \text{ Y } \begin{pmatrix} u^1 & 1 \cdot u^{1-1} & \dfrac{1(1-1)}{2}\;u^{1-2} \\ 0 & u^1 & nu^{n1-1} \\ 0 & 0 & u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

Así que,

$$\begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} u^1 & 1 \cdot u^{1-1} & \dfrac{1(1-1)}{2}\;u^{1-2} \\ 0 & u^1 & nu^{n1-1} \\ 0 & 0 & u^1 \end{pmatrix}$$ y la fórmula es verdadera para $n = 1$.

[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Etapa 2. Si suponemos como Hipótesis de Inducción que:

$$\begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} u^n & nu^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\, u^{n-2} \\ 0 & u^n & nu^{n-1} \\ 0 & 0 & u^n \end{pmatrix} \qquad (H)$$

Etapa 3. Entonces la Tesis de Inducción consiste en demostrar que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} u^{n+1} & (n+1)u^{(n+1)-1} & \dfrac{(n+1)((n+1)-1)}{2}\, u^{(n+1)-2} \\ 0 & u^{(n+1)} & (n+1)u^{(n+1)-1} \\ 0 & 0 & u^{(n+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^{n+1} & (n+1)u^{n} & \dfrac{n(n+1)}{2}\, u^{(n-1)} \\ 0 & u^{(n+1)} & (n+1)u^{n} \\ 0 & 0 & u^{(n+1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En efecto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \\ &\overset{(H)}{=} \begin{pmatrix} u^n & nu^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\, u^{n-2} \\ 0 & u^n & nu^{n-1} \\ 0 & 0 & u^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 1 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u^{n+1} & (n+1)u^{n} & \dfrac{n(n+1)}{2}\, u^{(n-1)} \\ 0 & u^{(n+1)} & (n+1)u^{n} \\ 0 & 0 & u^{(n+1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tal que $[T(x,y,z,w)]_{c(4)} = \begin{pmatrix} c(x+w)+ay+bz \\ ax+c(y+z)+bw \\ bx+c(y+z)+aw \\ c(x+w)+by+az \end{pmatrix}$. Demuestre que $[a = b \Longrightarrow T$ no sobreyectiva$]$

Solución,

1. Por definición T posee una representación matricial de la forma:

$$\begin{aligned} [T]_{c(4)}^{c(4)} &= \big([T(1,0,0,0)]_{c(4)}\ [T(0,1,0,0)]_{c(4)}\ [T(0,0,1,0)]_{c(4)}\ [T(0,0,0,1)]_{c(4)}\big) \\ &= \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Si $b = a$ entonces $[T]_{c(4)}^{c(4)} = \begin{pmatrix} c & a & a & c \\ a & c & c & a \\ a & c & c & a \\ c & a & a & c \end{pmatrix}$, luego $\det \begin{pmatrix} c & a & a & c \\ a & c & c & a \\ a & c & c & a \\ c & a & a & c \end{pmatrix} = 0$, tiene filas iguales.

Así que T no es un isomorfismo, y por el teorema de la dimensión no es sobreyectiva (Caso contrario sería también inyectiva).

(3) Si $\alpha = \{x, x^2+3, 2x^2+x\}$ y $\beta = \{x+3, x-2, x^2+1\}$ son dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ entonces

(i) Construya, si es posible, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que $A = [T]_\alpha^\beta$

Solución

1. Por definición la representación matricial de T es la siguiente:

$$\begin{aligned} [T]_\alpha^\beta &= \big([T(x)]_\beta \; [T(3+x^2]_\beta \; [T(x+2x^2)]_\beta\big) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$[T(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T(x) = x+3+2(x-2)+x^2+1 = 3x+x^2$$

$$[T(3+x^2)]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T(3+x^2) = x+3+2(x-2)+x^2+1 = 3x+x^2$$

$$[T(x+2x^2)]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow T(x+2x^2) = 2(x+3)+4(x-2)+x^2+1 = -1+6x+x^2$$

2. Como α es base entonces calculamos genéricamente $[a_0+a_1x+a_2x^2]_\alpha$, es decir, resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} a_0+a_1x+a_2x^2 &= b_0x+b_1(3+x^2)+b_2(x+2x^2) \\ &= 3b_1+(b_0+b_2)x+(b_1+2b_2)x^2 \end{aligned}$$

Luego del resultado del sistema,

$$\left.\begin{aligned} 3b_1 &= a_0 \\ b_0+b_2 &= a_1 \\ b_1+2b_2 &= a_2 \end{aligned}\right| \Longrightarrow b_1 = \frac{a_0}{3} \wedge b_2 = \frac{3a_2-a_0}{6} \wedge b_0 = \frac{6a_1-3a_2+a_0}{6}$$

Sigue que,

$$
\begin{array}{rcl}
a_0 + a_1x + a_2x^2 & = & \dfrac{6a_1 - 3a_2 + a_0}{6}x + \dfrac{a_0}{3}(3 + x^2) + \dfrac{3a_2 - a_0}{6}(x + 2x^2) \\
& \Downarrow & \\
T(a_0 + a_1x + a_2x^2) & = & \dfrac{6a_1 - 3a_2 + a_0}{6}T(x) + \dfrac{a_0}{3}T(3 + x^2) + \dfrac{3a_2 - a_0}{6}T(x + 2x^2) \\
& \Downarrow & \\
& = & \dfrac{6a_1 - 3a_2 + a_0}{6}(3x + x^2) + \dfrac{a_0}{3}(3x + x^2) + \dfrac{3a_2 - a_0}{6}(-1 + 6x + x^2) \\
& = & \left(\dfrac{a_0 - 3a_2}{6}\right) + \left(\dfrac{a_0 + 6a_1 + 3a_2}{2}\right)x + \left(\dfrac{3a_1 + a_0}{3}\right)x^2
\end{array}
$$

(ii) Determine $[T(1 + x + x^2)]_\beta$

Solución

$$
\begin{array}{rcl}
[T(1 + x + x^2)]_\beta & = & \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
& \Updownarrow & \\
T(1 + x + x^2) & = & c_0(x + 3) + c_1(x - 2) + c_2(x^2 + 1) \\
& \Updownarrow & \\
-\left(\dfrac{1}{3}\right) + 5x + \left(\dfrac{4}{3}\right)x^2 & = & (3c_0 - 2c_1 + c_2) + (c_0 + c_1)x + c_2x^2
\end{array}
$$

Luego,del resultado del sistema,

$$
\left.\begin{array}{rcr}
3c_0 - 2c_1 + c_2 & = & -\dfrac{1}{3} \\
c_0 + c_1 & = & 5 \\
c_2 & = & \dfrac{4}{3}
\end{array}\right| \Longrightarrow c_2 = \frac{4}{3} \wedge c_0 = \frac{5}{3} \wedge c_1 = \frac{10}{3}
$$

Sigue que,

$$
[T(1 + x + x^2)]_\beta = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{4}{3} \end{pmatrix}
$$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial de dimensión finita n, $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $L \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ y $U \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$
- U es invertible.
- $L = U \circ T \circ U^{-1}$

Entonces

(i) Demuestre que L inyectiva $\Longrightarrow T$ inyectiva

Solución

1. Supongamos L inyectiva, es decir $ker(L) = \{0_{\mathbb{V}}\}$
2. Sea $u \in ker(T)$

$$\begin{array}{rclcll}
u \in ker(T) & \Longleftrightarrow & u \in \mathbb{V} & \wedge & T(u) = 0_{\mathbb{V}} & \\
& \Longleftrightarrow & u \in \mathbb{V} & \wedge & U(T(u)) = U(0_{\mathbb{V}}) & \\
& \Longleftrightarrow & u \in \mathbb{V} & \wedge & (U \circ T)(u)) = 0_{\mathbb{V}} & [U \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})] \\
& \Longleftrightarrow & u \in \mathbb{V} & \wedge & (L \circ U)(u)) = 0_{\mathbb{V}} & [L \circ U = U \circ T] \\
& \Longleftrightarrow & u \in \mathbb{V} & \wedge & L(U(u)) = 0_{\mathbb{V}} & \\
& \Longrightarrow & u \in \mathbb{V} & \wedge & U(u) \in ker(L) & \\
& \Longrightarrow & u \in \mathbb{V} & \wedge & U(u) = 0_{\mathbb{V}} & [ker(L) = \{0_{\mathbb{V}}\}] \\
& \Longrightarrow & u \in \mathbb{V} & \wedge & u \in ker(U) & \\
& \Longrightarrow & u \in \mathbb{V} & \wedge & u = 0_{\mathbb{V}} & [U \text{ invertible}] \\
& \Longrightarrow & u = \{0_{\mathbb{V}}\} & & &
\end{array}$$

Luego T es inyectiva.

Solución alternativa

1. L inyectiva, entonces $\det(L) \neq 0$, es decir, $\det[L]_{\alpha}^{\alpha} \neq 0$, para cualquier base α de $\mathbb{V}$.

Ahora como,

$$\begin{aligned}
\det[L]_{\alpha}^{\alpha} &= \det[U \circ T \circ U^{-1}]_{\alpha}^{\alpha} \\
&= \det\left([U]_{\alpha}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}[U^{-1}]_{\alpha}^{\alpha}\right) \\
&= \det[U]_{\alpha}^{\alpha} \det[T]_{\alpha}^{\alpha} \det[U^{-1}]_{\alpha}^{\alpha} \\
&= \det[U]_{\alpha}^{\alpha} \det[T]_{\alpha}^{\alpha} \det\left([U]_{\alpha}^{\alpha}\right)^{-1} \\
&= \det[U]_{\alpha}^{\alpha} \det[T]_{\alpha}^{\alpha} \left(\det[U]_{\alpha}^{\alpha}\right)^{-1} \\
&= \det[U]_{\alpha}^{\alpha} \left(\det[U]_{\alpha}^{\alpha}\right)^{-1} \det[T]_{\alpha}^{\alpha} \\
&= \det[T]_{\alpha}^{\alpha}
\end{aligned}$$

Sigue que, $\det[L]_\alpha^\alpha \neq 0 \Longrightarrow \det[T]_\alpha^\alpha \neq 0$, es decir T inyectiva.

(ii) Demuestre que L diagonalizable $\Longrightarrow T$ diagonalizable

Solución

1. Si L es diagonalizable entonces existe una base $\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$ de vectores propios de T.

2. Además de la relación entre L y T, sigue que para cualquier vector propio u de L tenemos:

$$\begin{aligned} L(u) = \lambda u &\Longrightarrow (U \circ T \circ U^{-1})(u) = \lambda u \\ &\Longrightarrow (T \circ U^{-1})(u) = U^{-1}(\lambda u) \\ &\Longrightarrow T(U^{-1}(u)) = \lambda U^{-1}(u) \end{aligned}$$

Conclusión : u vector propio de L entonces $U^{-1}(u)$ es vector propio de T, es decir.

$$\underbrace{\alpha = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}}_{\text{base de vectores propios de } L} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{U^{-1}(\alpha) := \{U^{-1}(v_1), U^{-1}(v_2), \cdots, U^{-1}(v_n)\}}_{\text{vectores propios de } T}$$

3. Pero, $U^{-1}(\alpha) := \{U^{-1}(v_1), U^{-1}(v_2), \cdots, U^{-1}(v_n)\}$, es una base del espacio $\mathbb{V}$, pues U es invertible, en cualquier caso, como la dimensión de $\mathbb{V}$ es n entonces basta mostrar que $U^{-1}(\alpha)$ es linealmente independiente.

En efecto

$$\begin{aligned} a_1U^{-1}(v_1) + a_2U^{-1}(v_2) + \cdots + a_nU^{-1}(v_n) = 0_{\mathbb{V}} &\Longrightarrow U^{-1}(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = 0_{\mathbb{V}} \\ &\Longrightarrow (a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) \in ker(U^{-1}) \\ &\Longrightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0_{\mathbb{V}} \\ &\Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0 \\ &\Longrightarrow U^{-1}(\alpha) \text{ linealmente independiente en } \mathbb{V} \end{aligned}$$

Luego, T diagonalizable.