Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Prueba Especial Programada N° 3 [1]
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
22 de Noviembre del 2003

(1.a) Demuestre usando propiedades (sin desarrollar directamente) que

$$det\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1\\ a^2 & (a^2+2a) & (2a+1) & 1\\ a & (2a+1) & (a+2) & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix} = (a-1)^6$$

Solución

$$\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1\\ a^2 & (a^2+2a) & (2a+1) & 1\\ a & (2a+1) & (a+2) & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix} &\overset{(l_1\longrightarrow l_1-l_4)}{=} det\begin{pmatrix} a^3-1 & 3a^2-3 & 3a-3 & 0\\ a^2 & (a^2+2a) & (2a+1) & 1\\ a & (2a+1) & (a+2) & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\\
&\overset{(l_2\longrightarrow l_2-l_4)}{=} det\begin{pmatrix} a^3-1 & 3a^2-3 & 3a-3 & 0\\ a^2-1 & (a^2+2a-3) & (2a+1-3) & 0\\ a & (2a+1) & (a+2) & 1\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\\
&\overset{(l_3\longrightarrow l_2-l_4)}{=} det\begin{pmatrix} a^3-1 & 3a^2-3 & 3a-3 & 0\\ a^2-1 & (a^2+2a-3) & (2a+1-3) & 0\\ a-1 & (2a+1-3) & (a+2-3) & 0\\ 1 & 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\\
&= det\begin{pmatrix} a^3-1 & 3a^2-3 & 3a-3\\ a^2-1 & (a^2+2a-3) & (2a+1-3)\\ a-1 & 2(a-1) & (a-1)\end{pmatrix}\\
&= (a-1)det\begin{pmatrix} a^3-1 & 3a^2-3 & 3(a-1)\\ a^2-1 & (a^2+2a-3) & 2(a-1)\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\\
&\overset{(l_1\longrightarrow l_1-3(a-1)l_3)}{=} (a-1)\ det\begin{pmatrix} a^3-1-3(a-1) & 3a^2-3-6(a-1) & 0\\ a^2-1 & (a^2+2a-3) & 2(a-1))\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\\
&\overset{(l_1\longrightarrow l_1-2(a-1)l_3)}{=} (a-1)det\begin{pmatrix} a^3-1-3(a-1) & 3a^2-3-6(a-1) & 0\\ a^2-1-2(a-1) & (a^2+2a-3)-4(a-1) & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\\
&= (a-1)det\begin{pmatrix} a^3-1-3(a-1) & 3a^2-3-6(a-1)\\ a^2-1-2(a-1) & (a^2+2a-3)-4(a-1)\end{pmatrix}\\
&= (a-1)det\begin{pmatrix} a^3-3a+2 & 3a^2-6a+3\\ a^2-2a+1 & a^2-2a+1\end{pmatrix}\\
&= (a-1)(a^2-2a+1)det\begin{pmatrix} a^3-3a+2 & 3a^2-6a+3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\
&= (a-1)(a^2-2a+1)(a^3-3a+2-3a^2+6a-3)\\
&= (a-1)(a^2-2a+1)(a^3-3a^2+3a-1)\\
&= (a-1)^6
\end{aligned}$$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 90 minutos

(1.b) Demuestre que $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$, para $(n \in \mathbb{N})$

Solución

Expresando el complejo $(1+i)$ en forma trigonométrica tenemos que

$$1+i = |1+i|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} 1+i = |1+i|(\cos\alpha + i\sin\alpha) & \Longleftrightarrow & \left.\begin{array}{rcl} \sqrt{2}\cos\alpha & = & 1 \\ \sqrt{2}\sin\alpha & = & 1 \end{array}\right| \\ & \Longleftrightarrow & \left.\begin{array}{rcl} \cos\alpha & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \\ & \Longrightarrow & \alpha = \frac{\pi}{4} \end{array}$$

Así que,

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Por tanto;

$$\begin{array}{rcl} (1+i)^n & = & (\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n \\ & = & 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \end{array}$$

(2) Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$. Suponga que existe $P \in \mathbb{U}\left(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)\right)$ tal que $B = P^{-1}AP$

(a) Demuestre que $B^n = P^{-1}A^nP \quad (n \in \mathbb{N})$ y

Solución

$$\begin{array}{rcl} B = P^{-1}AP & \Longrightarrow & B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \\ & \Longrightarrow & B^2 = P^{-1}APP^{-1}AP \\ & \Longrightarrow & B^2 = P^{-1}AAP \\ & \Longrightarrow & B^2 = P^{-1}A^2P \end{array}$$

Así que iterando el proceso tenemos que:

$$\begin{aligned}
B^n &= BBB\cdots B \qquad \text{(n - veces)}\\
&= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \qquad \text{(n - veces)}\\
&= P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP\\
&= P^{-1}AAA\cdots AP \qquad \text{(n - veces)}\\
&= P^{-1}A^nP
\end{aligned}$$

(b) Concluya que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_iA^i = (0) \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_iB^i = (0)$

Solución

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} a_iB^i &= \sum_{i=0}^{n} a_i(P^{-1}AP)^i\\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i(P^{-1}A^iP)\\
&= \sum_{i=0}^{n}(P^{-1}a_iA^iP)\\
&= P^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_iA^i\right)P\\
&= P^{-1}\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} a_iA^i\right)}_{(0)}P\\
&= P^{-1}(0)P\\
&= (0)
\end{aligned}$$

(3) Una matriz $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, se llama una matriz ortogonal si satisface simultáneamente las siguiente dos propiedades:

(a) $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ (es decir, A invertible)

(b) $A^{-1} = A^t$, donde A^t, es la matriz traspuesta de la matriz A.

Si A es una matriz ortogonal entonces demuestre que:

(i) $\det(A) = \pm 1$

Solución

$$\begin{aligned} A^{-1} = A^t &\Longrightarrow AA^t = I_n \\ &\Longrightarrow \det(AA^t) = \det(I_n) \\ &\Longrightarrow \det(A)\det(A^t) = 1 \\ &\Longrightarrow \det(A)\det(A) = 1 \\ &\Longrightarrow (\det(A))^2 = 1 \\ &\Longrightarrow \det(A) = \pm 1 \end{aligned}$$

(ii) A^{-1} es ortogonal
Solución

- A invertible entonces A^{-1} es invertible, y su inversa es A.
- Ahora

$$\begin{aligned} A^{-1}(A^{-1})^t &= A^{-1}(A^t)^{-1} \\ &= (A^tA)^{-1} \\ &= I_n^{-1} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Luego, A^{-1} es una matriz ortogonal.

(iii) A^t es ortogonal

Solución

- A invertible entonces A^t es invertible pues,

$$AA^{-1} = I_n \Longrightarrow (AA^{-1})^t = (A^{-1})^tA^t = I_n$$

- Ahora

$$\begin{aligned} A^t(A^t)^t &= A^tA \\ &= I_n \qquad (A \text{ matriz ortogonal}) \end{aligned}$$

Luego, A^t es una matriz ortogonal.

(4) Considere el sistema lineal:

$$
(1) \qquad \begin{array}{rcrcrcl|}
x & - & by & - & cz & = & 0 \\
-ax & + & y & - & cz & = & 0 \\
-ax & - & by & + & z & = & 0 \\ \hline
\end{array}
$$

Si el sistema (1) tiene mas de una solución entonces demuestre que:

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$$

Solución

Escalonemos la matriz asociada al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ -a & 1 & -c \\ -a & -b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 1-ab & -c-ac \\ 0 & -b-ab & 1-ac \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 1 & \dfrac{-c-ac}{1-ab} \\ 0 & -b-ab & 1-ac \end{pmatrix} \quad (ab \neq 1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 1 & \dfrac{-c-ac}{1-ab} \\ 0 & 0 & (1-ac)+\dfrac{(b+ab)(-c-ac)}{1-ab} \end{pmatrix}$$

Como el sistema tiene más de una solución su rango es menor que 3, y entonces es 2, luego, debe ocurrir que:

$$(1-ac)+\frac{(b+ab)(-c-ac)}{1-ab}=0$$

Equivalentemente

$$1-2abc-ab-ac-bc=0 \qquad (*)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c} &= \frac{a(1+b)(1+c)+b(1+a)(1+c)+c(1+a)(1+b)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\
&= \frac{a+ac+ab+abc+b+bc+ab+abc+c+bc+ac+abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\
&= \frac{a+b+c+1+1-abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} \qquad \text{(Se ha aplicado } (*)) \\
&= \frac{a+b+c+1+1-abc}{1+a+b+c+ab+bc+ac+abc} \\
&= \frac{1+a+b+c+1-abc}{1+a+b+c+1-abc} \qquad \text{(Se ha aplicado } (*)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

ESPERO QUE HAYA TENIDO UN BUEN DESEMPEÑO !!!