Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Prueba Especial Programada Nº 2 [1]
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
3 de Septiembre del 2003

(1) Sean $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dos funciones biyectivas definidas por $y = f(x)$ e $y = g(x)$ respectivamente.

(i) Si $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ tal que $y = h(x)$ es una función. Demuestre que

$$h \circ f = g \circ f \Longrightarrow h = g$$

Solución

1. Como f es biyectiva entonces existe f^{-1} y $f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$

2. $$\begin{aligned} h \circ f = g \circ f &\Longrightarrow (h \circ f) \circ f^{-1} = (g \circ f) \circ f^{-1} \\ &\Longrightarrow h \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \\ &\Longrightarrow h \circ 1_{\mathbb{R}} = g \circ 1_{\mathbb{R}} \\ &\Longrightarrow h = g \end{aligned}$$

Solución alternativa

1. Como f es biyectiva entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único $u \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = x$.

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 90 minutos

2. p.d.q.: $h(x) = g(x) \quad (\forall x; x \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} h(x) &= h(f(u)) \\ &= (h \circ f)(u) \\ &= (g \circ f)(u) \\ &= g(f(u) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Luego $h = g$.

(ii) Si $H : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $H(x, y) = (f(x), g(y))$. Demuestre que H es biyectiva.

Solución

1. H es inyectiva.

En efecto

$$\begin{aligned} H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2) &\iff (f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), g(y_2)) \\ &\iff f(x_1) = f(x_2) \quad \wedge \quad g(y_1) = g(y_2) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \ \ (f \text{ inyectiva}) \text{ e } y_1 = y_2 \ \ (g \text{ inyectiva}) \\ &\Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \end{aligned}$$

Luego, H es inyectiva.

2. H es sobreyectiva.

En efecto

Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, como f es sobreyectiva entonces existe $u \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = x$, como g es sobreyectiva entonces existe $v \in \mathbb{R}$ tal que $g(v) = y$.

Ahora,

$$\begin{aligned} H(u,v) &= (f(u), g(v)) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

Luego H es sobreyectiva y por tanto biyectiva.

(2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (ax + 3y, bx + 2y)$, donde a y b son números reales.

(i) Determine el conjunto $\mathbb{B} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ es biyectiva}\}$

Solución

1. f inyectiva si y sólo si $\quad [f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Longrightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)]$

Ahora,

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) &\Longleftrightarrow (ax_1 + 3y_1, bx_1 + 2y_1) = (ax_2 + 3y_2, bx_2 + 2y_2) \\ &\Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} ax_1 + 3y_1 &=& ax_2 + 3y_2 \\ bx_1 + 2y_1 &=& bx_2 + 2y_2 \end{array} \\ &\Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} a(x_1 - x_2) + 3(y_1 - y_2) &=& 0 \\ b(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) &=& 0 \end{array} \\ &\Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 2a(x_1 - x_2) + 6(y_1 - y_2) &=& 0 \\ 3b(x_1 - x_2) + 6(y_1 - y_2) &=& 0 \end{array} \\ &\Longleftrightarrow (2a - 3b)(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Longrightarrow (2a - 3b) = 0 \quad \vee \quad (x_1 - x_2) = 0 \\ \text{ahora } (2a - 3b) \neq 0 &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Analogamente

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2) \iff \left.\begin{array}{rcl} a(x_1-x_2)+3(y_1-y_2) &=& 0\\ b(x_1-x_2)+2(y_1-y_2) &=& 0 \end{array}\right|$$

$$\iff \left.\begin{array}{rcl} ab(x_1-x_2)+3b(y_1-y_2) &=& 0\\ ab(x_1-x_2)+2a(y_1-y_2) &=& 0 \end{array}\right|$$

$$\iff (2a-3b)(y_1-y_2)=0$$

$$\Longrightarrow (2a-3b)=0 \quad \vee \quad (y_1-y_2)=0$$

ahora $(2a-3b)\neq 0 \Longrightarrow y_1=y_2$

Así que $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ y f es inyectiva

Por otra parte.

Si $(p,q)\in\mathbb{R}^2$, f sobreyectiva si existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=(p,q)$.

Luego debemos resolver la ecuación $(ax+3y,bx+2y)=(p,q)$

$$(ax+3y,bx+2y)=(p,q) \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} ax+3y &=& p\\ bx+2y &=& q \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2ax+6y &=& 2p\\ 3bx+6y &=& 3q \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow x=\frac{2p-3q}{2a-3b}; \qquad (2a-3b\neq 0)$$

$$\text{Análogamente} \qquad y=\frac{aq-pb}{2a-3b}; \qquad (2a-3b\neq 0)$$

$$\text{Así } f(x,y)=f\left(\frac{2p-3q}{2a-3b}\,,\,\frac{aq-pb}{2a-3b}\right)=(p,q)$$

(ii) Si $(a,b)\in\mathbb{B}$ entonces determine f^{-1}

Solución

$$(a,b)\in\mathbb{B}\Longrightarrow 2a-3b\neq 0\Longrightarrow f^{-1}(p,q)=\left(\frac{2p-3q}{2a-3b}\,,\,\frac{aq-pb}{2a-3b}\right)$$

(3) Para completar la construcción de una carretera, se contempla excavar un túnel bajo una montaña de 260 metros de altura. A una distancia de 200 metros de la base de dicha montaña, y en la línea de la carretera el ángulo de elevación de su cima es de 36°. De una distancia de 150 metros de la base de la montaña, y en la misma linea de la carretera, pero del otro lado de la montaña su ángulo de elevación es de 47°. Determine la longitud del túnel que se debe construir, en la línea de la carretera.

Solución

1. Planteamiento.

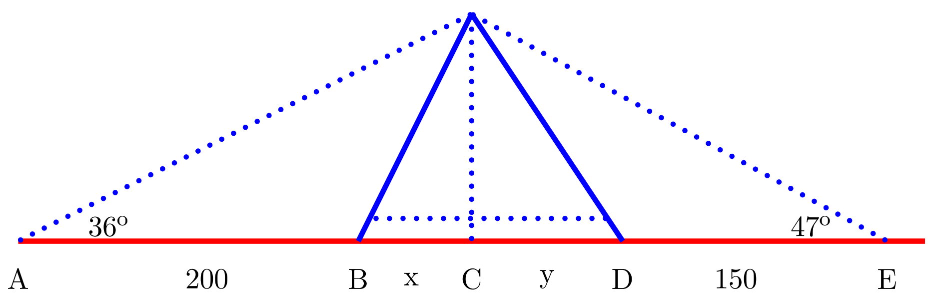

Figura 1

2. Datos.

De la figura sigue que:

$$\tan 36 = \frac{260}{200 + x} \implies x = \frac{260}{0.72654} - 200 = 157.859 \tag{1}$$

Analogamente

$$\tan 47 = \frac{260}{150 + y} \implies y = \frac{260}{1.0723} - 150 = 92.469458 \tag{2}$$

3. Finalmente de (1) y (2) sigue que el túnel mide: $x + y \approx 250$ metros.

(4) Determine la ecuación canónica del círculo cuyo centro es el centro de la elipse $4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 8 = 0$ y que pasa por el punto $P = (0, 5)$.

Solución

1. Sea

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{3}$$

La ecuación canónica pedida:

2. Determinemos el centro de la elipse $4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 8 = 0$.

$$\begin{aligned}
4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 8 = 0 &\iff 4x^2 - 8x + y^2 - 4y = 8 \\
&\iff 4(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) = 8 \\
&\iff 4(x^2 - 2x + 1 - 1) + (y^2 - 4y + 4 - 4) = 8 \\
&\iff 4\left[(x-1)^2 - 1)\right] + (y^2 - 2)^2 - 4 = 8 \\
&\iff 4(x-1)^2 - 4 + (y^2 - 2)^2 - 4 = 8 \\
&\iff 4(x-1)^2 + (y^2 - 2)^2 = 16 \\
&\iff \frac{4(x-1)^2}{16} + \frac{(y^2-2)^2}{16} = 1 \\
&\iff \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y^2-2)^2}{16} = 1
\end{aligned}$$

Luego, el centro de la elipse es $C = (1,2)$

3. Sustituyendo $C = (1,2)$ en (3) tenemos que la ecuación queda de la forma:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2 \tag{4}$$

4. Como el punto $P = (0,5)$ pertenece al circulo (4) entonces tenemos que:
$$(0-1)^2 + (5-2)^2 = r^2 \implies r^2 = 10$$

Así que la ecuación pedida es:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$$