

Solución Prueba Especial Programada N° 1 ¹
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
20 de Agosto del 2003

(1) Para la relación R definida en \mathbb{Z}^+ por

$$m R n \iff (\exists u; u \in \mathbb{Z}) : m = n \cdot 2^u$$

- (a) Demuestre que R es una relación de equivalencia
- (b) Determine el conjunto \bar{a} ; ($a \in \mathbb{Z}^+$)

Solución

(a) Demostremos que R es una relación de equivalencia

(i) R es una relación reflexiva.

En efecto

$$m = m \cdot 1 = m \cdot 2^0 \implies m R m \quad (\forall m; m \in \mathbb{Z}^+)$$

Luego R es una relación reflexiva.

(ii) R es una relación simétrica.

En efecto

$$m R n \iff (\exists u; u \in \mathbb{Z}) : m = n \cdot 2^u \implies n = m \cdot 2^{-u} \quad (-u \in \mathbb{Z})$$

Luego R es una relación simétrica.

(iii) R es una relación transitiva.

En efecto

¹Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 90 minutos

$$\begin{aligned}
m R n \wedge n R t &\implies (\exists u; u \in \mathbb{Z}) : m = n \cdot 2^u \wedge (\exists s; s \in \mathbb{Z}) : n = t \cdot 2^s \\
&\implies (\exists u; u \in \mathbb{Z})(\exists s; s \in \mathbb{Z}) : m = t \cdot 2^s \cdot 2^u \\
&\implies (\exists u; u \in \mathbb{Z})(\exists s; s \in \mathbb{Z}) : m = t \cdot 2^{s+u} \\
&\implies m R t
\end{aligned}$$

Luego, R es una relación transitiva.

(b) Determinemos \bar{a}

$$\begin{aligned}
b \in \bar{a} &\iff b \in \mathbb{Z}^+ \wedge b R a \\
&\iff b \in \mathbb{Z}^+ \wedge b = a \cdot 2^u \\
&\iff \bar{a} = \{a \cdot 2^u \mid u \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

(2) (a) Determine, (si existe) el término independiente de x en el desarrollo binomial

$$(2x + 1) \left(1 + \frac{2}{x}\right)^n$$

Solución

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{2}{x}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{(n-k)} \left(\frac{2}{x}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k x^{-k} \\
&\Downarrow \\
(2x + 1) \left(1 + \frac{2}{x}\right)^n &= (2x + 1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k x^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+1} x^{(-k+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k x^{-k}
\end{aligned}$$

Luego, existirá el término independiente de x si y sólo si

$$\begin{aligned} -k + 1 = 0 \quad \wedge \quad -k = 0 \\ \Downarrow \\ k = 1 \quad \wedge \quad k = 0 \end{aligned}$$

Así que el término pedido es

$$\binom{n}{1} \cdot 2^2 + \binom{n}{0} \cdot 2^0 = 4n + 1$$

(b) Demuestre usando el teorema del binomio que:

$$\sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n}{s} = 0$$

Solución

$$\begin{aligned} (1 - 1)^n = 0 \quad \wedge \quad (1 - 1)^n = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (1)^{(n-s)} (-1)^s \\ \Downarrow \\ 0 = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (-1)^s \end{aligned}$$

(3) Si $G = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, es una progresión geométrica que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

(a) $a_2 = 4$

(b) $\frac{a_4}{a_6} = \frac{25}{4}$

entonces determine la progresión G .

Solución

(a) $a_2 \in G \implies a_1 \cdot r = 4$

(b) $a_4 \in G \wedge a_6 \in G \implies a_4 = a_1 \cdot r^3 \wedge a_6 = a_1 \cdot r^5$

Luego

$$\frac{a_4}{a_6} = \frac{1}{r^2} \implies r^2 = \frac{4}{25} \implies r = \pm \frac{2}{5}$$

Además como, $a_1 \cdot r = 4$ entonces $a_1 = \pm 10$. Así que las posibles progresiones son:

$$(i) G = \left\{10, 4, \frac{8}{5}, \dots\right\}$$

$$(ii) G = \left\{-10, 4, -\frac{8}{5}, \dots\right\}$$

(4) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula:

$F(n)$: $n^3 - n$ es divisible por 6. Es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

Solución

Etapas 1: Por demostrar que $F(1)$ es verdadera.

$1^3 - 1 = 0 = 6 \cdot 0$. Luego $1^3 - 1$ es divisible por 6 y entonces $F(1)$ es verdadera.

Etapas 2: Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera.

e.e.

($\exists r; r \in \mathbb{R}$) tal que $n^3 - n = 6r$ (H)

Etapas 3: Tesis de Inducción. Por demostrar que $F(n + 1)$, es verdadera

En efecto

$$\begin{aligned} (n + 1)^3 - (n + 1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= (n^3 - n) + 3(n^2 + n) \\ &\stackrel{H}{=} 6 \cdot r + 3(n^2 + n) \quad (*) \end{aligned}$$

Basta mostrar que la fórmula [$G(n)$: $n^2 + n$ es divisible por 2] es verdadera ($\forall n; n \in \mathbb{N}$)

En efecto

Subetapa 3.1. Por demostrar que $G(1)$ es verdadera

$1^2 + 1 = 2$ divisible por 2. Luego $G(1)$ es verdadera

Subetapa 2: Hipótesis de Inducción

$G(n)$ es verdadera, e.e. $(\exists q; q \in \mathbb{R}) : n^2 + n = 2q \quad (h)$

Subetapa 3: Tesis de Inducción. Por demostrar que $G(n + 1)$ es verdadera

En efecto

$$\begin{aligned}
 (n + 1)^2 + (n + 1) &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\
 &= (n^2 + n) + 2(n + 1) \\
 &\stackrel{h}{=} 2q + 2(n + 1) \\
 &= 2(q + n + 1) \quad (**)
 \end{aligned}$$

Luego $G(n + 1)$ es verdadera y $G(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$.

Finalmente, sustituyendo (h) en $(*)$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (n + 1)^3 - (n + 1) &= 6 \cdot r + 3[2q] \quad (*) \\
 &= 6 \cdot (r + q) \quad (*)
 \end{aligned}$$

Luego $F(n + 1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$.