Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Prueba Acumulativa Semestral[1]
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
04 de Octubre del 2003

(1) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula:

$$\mathrm{F}(n) \quad : \quad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \quad \text{es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

Solución

(a) P.d.q. $F(1)$ es verdadera.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{1}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right) &= \frac{1}{1(2)(3)}=\frac{1}{6} \\ \text{Por otra parte } \frac{1(4)}{4(2)(3)} &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Luego, $F(1)$ es verdadera.

(b) Hipótesis de Inducción.

Supongamos que $F(n)$ es verdadera. Esto es

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \qquad (H)$$

(c) P.d.q $F(n+1)$ es verdadera.

En efecto

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 120 minutos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\sum_{k=n+1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\\
&\overset{(H)}{=} \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&= \frac{n(n^2+6n+9)+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&= \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\\
&= \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

Así que $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(2) Sea $\mathbb{L} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$. Si se define en $\mathbb{R}^2$ la relación R como sigue:

$$(x_1, y_1)\ R\ (x_2, y_2) \iff (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{L}$$

(a) Demuestre que R es una relación de equivalencia

En efecto

(i) R es reflexiva, pues:

$$\begin{aligned}
(x-x, y-y) &= (0,0) \quad (\forall (x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2) \wedge 0 - 2\cdot 0 = 0\\
&\Downarrow\\
(x-x, y-y) &\in \mathbb{L}\\
&\Downarrow \quad \text{(Por definición)}\\
(x,y) \quad &R \quad (x,y) \quad (\forall (x,y); (x,y) \in \mathbb{R}^2)
\end{aligned}$$

(ii) R es simétrica, pues.

$$\begin{aligned}
(x_1,y_1)R(x_2,y_2) &\Longrightarrow (x_1-x_2,y_1-y_2)\in\mathbb{L}\\
&\Longrightarrow x_1-x_2=2(y_1-y_2)\\
&\Longrightarrow x_2-x_1=2(y_2-y_1)\\
&\Longrightarrow (x_2-x_1,y_2-y_1)\in\mathbb{L}\\
&\Longrightarrow (x_2,y_2)R(x_1,y_1)
\end{aligned}$$

(iii) R es transitiva, pues si $[(x_1,y_1)R(x_2,y_2)]\wedge[(x_2,y_2)R(x_3,y_3)]$ entonces

$$\begin{aligned}
(x_1,y_1)R(x_2,y_2) &\Longrightarrow (x_1-x_2,y_1-y_2)\in\mathbb{L}\\
&\Longrightarrow x_1-x_2=2(y_1-y_2) \qquad (*)\\
(x_2,y_2)R(x_3,y_3) &\Longrightarrow (x_2-x_3,y_2-y_3)\in\mathbb{L}\\
&\Longrightarrow x_2-x_3=2(y_2-y_3) \qquad (**)
\end{aligned}$$

Luego de (*) y (**) sigue que

$$\begin{array}{rcl}
x_1-x_2+x_2-x_3 &=& 2(y_1-y_2)+2(y_2-y_3)\\
&\Downarrow&\\
x_1-x_3 &=& 2(y_1-y_3)\\
&\Downarrow&\\
(x_1-x_3,y_1-y_3) &\in& \mathbb{L}\\
&\Downarrow&\\
(x_1,y_1) &R& (x_3,y_3)
\end{array}$$

Luego, R es una relación de equivalencia.

(b) Demuestre que $\overline{(0,0)}=\mathbb{L}$. Donde $\overline{(0,0)}$ representa la clase de equivalencia de $(0,0)$

En efecto

$$\begin{aligned}
(x,y)\in\overline{(0,0)} &\Longleftrightarrow (x,y)R(0,0)\\
&\Longleftrightarrow (x-0,y-0)\in\mathbb{L}\\
&\Longleftrightarrow (x,y)\in\mathbb{L}
\end{aligned}$$

Luego, $\overline{(0,0)}=\mathbb{L}$

(3) Considere la función $T:\mathbb{R}_3[x]\longmapsto\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ definida por:

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) \;=\; \begin{pmatrix}(a_0+a_1) & (a_2+a_3)\\ (a_2-a_3) & (a_0-a_1)\end{pmatrix}$$

(a) Demuestre que T es un isomorfismo de grupos

Solución

(i) T es un homomorfismo de grupos.

Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

- P.d.q. $T(p(x) + q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$

$$\begin{aligned}
T(p(x)+q(x)) &= T(a_0 + b_0 + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3) \\
&= \begin{pmatrix} (a_0+b_0)+(a_1+b_1) & (a_2+b_2)+(a_3+b_3) \\ (a_2+b_2)-(a_3+b_3) & (a_0+b_0)-(a_1+b_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_0+a_1)+(b_0+b_1) & (a_2+a_3)+(b_2+b_3) \\ (a_2-a_3)+(b_2-b_3) & (a_0-a_1)+(b_0-b_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_0+a_1) & (a_2+a_3) \\ (a_2-a_3) & (a_0-a_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_0+b_1) & (b_2+b_3) \\ (b_2-b_3) & (b_0-b_1) \end{pmatrix} \\
&= T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + T(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) \\
&= T(p(x)) + T(q(x))
\end{aligned}$$

Luego, T es un homomorfismo de grupos.

- p.d.q. T es inyectiva

$$\begin{aligned}
p(x) \in \ker\,(T) &\iff p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \wedge T(p(x)) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge \begin{pmatrix} (a_0+a_1) & (a_2+a_3) \\ (a_2-a_3) & (a_0-a_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge \left.\begin{array}{rcl} (a_0+a_1) &=& 0 \\ (a_0-a_1) &=& 0 \\ (a_2+a_3) &=& 0 \\ (a_2-a_3) &=& 0 \end{array}\right| \\
&\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\
&\iff p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \\
&\iff \text{Ker }(T) = \{0 + 0x + 0x^2 + 0x^3\}
\end{aligned}$$

Luego, T es inyectiva

- P.d.q. T es sobreyectiva.

Sea $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$. Para verificar que T es sobreyectiva basta resolver la ecuación:

$$T(p(x)) \;=\; B$$

entonces

$$\begin{aligned}
T(p(x)) = B \iff & T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
\iff & \begin{pmatrix} (a_0 + a_1) & (a_2 + a_3) \\ (a_2 - a_3) & (a_0 - a_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
\iff & \left.\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 & = & b_{11} \\ a_0 - a_1 & = & b_{22} \end{array}\right| \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_2 + a_3 & = & b_{12} \\ a_2 - a_3 & = & b_{21} \end{array}\right| \\
\iff & \left.\begin{array}{rcl} a_0 & = & \dfrac{b_{11} + b_{22}}{2} \\ a_1 & = & \dfrac{b_{11} - b_{22}}{2} \end{array}\right| \wedge \left.\begin{array}{rcl} a_2 & = & \dfrac{b_{12} + b_{21}}{2} \\ a_3 & = & \dfrac{b_{12} - b_{21}}{2} \end{array}\right|
\end{aligned}$$

Así que hemos encontrado el polinomio $p(x)$ deseado tal que

$$p(x) \;=\; \frac{b_{11} + b_{22}}{2} + \left(\frac{b_{11} - b_{22}}{2}\right)x + \left(\frac{b_{12} - b_{21}}{2}\right)x^2 + \left(\frac{b_{12} - b_{21}}{2}\right)x^3$$

Luego,

$$T\left[\frac{b_{11} + b_{22}}{2} + \left(\frac{b_{11} - b_{22}}{2}\right)x + \left(\frac{b_{12} - b_{21}}{2}\right)x^2 + \left(\frac{b_{12} - b_{21}}{2}\right)x^3\right] \;=\; \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

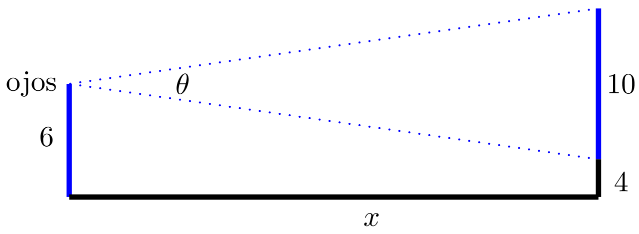
Por tanto T es un isomorfismo de grupos.

(b) Determine T^{-1}

Para calcular T^{-1} basta usar la fórmula obtenida encima. Esto es:

$$T^{-1}\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \;=\; \frac{b_{11} + b_{22}}{2} + \left(\frac{b_{11} - b_{22}}{2}\right)x + \left(\frac{b_{12} - b_{21}}{2}\right)x^2 + \left(\frac{b_{12} - b_{21}}{2}\right)x^3$$

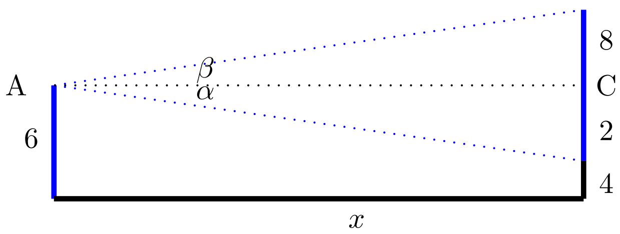
(4) Un crítico de arte cuyos ojos están a 6 unidades de longitud del suelo, observa con arrobamiento un cuadro que mide 10 unidades de altura, y está montado a 4 unidades sobre el piso, según la figura:



Si el crítico esta parado a una distancia x del cuadro, exprese el ángulo de visión θ en términos de la distancia x

Solución

Descomponemos el ángulo θ como la suma de los ángulos α y β, según la figura



Así, como en los triángulos rectángulos tenemos: $\tan(\alpha) = \dfrac{2}{x}$ y $\tan(\beta) = \dfrac{8}{x}$ entonces

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \tan(\alpha + \beta) \\ &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} \\ &= \frac{\frac{2}{x} + \frac{8}{x}}{1 - \frac{16}{x^2}} \\ &= \frac{10x}{x^2 - 16} \end{aligned}$$

Luego, $\theta = arctan\left(\dfrac{10x}{x^2 - 16}\right)$