Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Examen 2[1]
Álgebra Plan Anual
Profesor Ricardo Santander Baeza
3 de Marzo del 2004

(1) Demuestre que la fórmula $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Solución.

- Si $n = 1$ entonces $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

  Por otra parte:

  $\begin{pmatrix} 1 & 3^1 - 1 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

  Luego; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3^1 - 1 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix}$

- Supongamos que, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \qquad (H)$

- Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^1 \\
&\stackrel{(H)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

  Por tanto, la fórmula es válida $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Solución alternativa: Usando valores y vectores propios tenemos que:

- $P_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} (\lambda - 1) & -2 \\ 0 & (\lambda - 3) \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo: 120 minutos

Luego los Valores propios de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ son V.P.$= \{1, 3\}$

- Los subespacios propios son:

  $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1))_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

  Luego,

  $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2\times 1)$ y $[A]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Así que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[I]_\alpha^{c(3)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{[A]_\alpha^\alpha} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{[I]_{c(3)}^\alpha}$$

- Finalmente,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2.1) Sean $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que verifican las propiedades:

(a) $A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ y $B \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$

(b) A simétrica y B simétrica. ($A = A^t$ y $B = B^t$)

(c) $AB = BA$

Demuestre que:

(i) $A^{-1}B = BA^{-1}$

Solución

$$\begin{aligned} AB = BA &\iff B = A^{-1}BA \\ &\iff BA^{-1} = A^{-1}B \end{aligned}$$

(ii) $A^{-1}B$ es simétrica. (es decir $(A^{-1}B)^t = A^{-1}B$)
Solución

$$\begin{aligned} (A^{-1}B)^t &= B^t(A^{-1})^t \\ &= B(A^t)^{-1} \\ &= BA^{-1} \\ &= A^{-1}B \end{aligned}$$

(2.2) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que verifica las propiedades:

(a) $A^5 = (0)$

(b) $A^s \neq (0)$ para $s = 0, 1, 2, 3, 4$ y $A^0 = I_n$

Demuestre que:

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3 + A^4 \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$$

Solución

$$\begin{aligned} (I_n - A)(I_n + A + A^2 + A^3 + A^4) &= I_n(I_n + A + A^2 + A^3 + A^4) - A(I_n + A + A^2 + A^3 + A^4) \\ &= I_n + A + A^2 + A^3 + A^4 - (A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5) \\ &= I_n + A + A^2 + A^3 + A^4 - A - A^2 - A^3 - A^4 - A^5 \\ &= I_n - A^5 \\ &= I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I_n + A + A^2 + A^3 + A^4)(I_n - A) &= (I_n + A + A^2 + A^3 + A^4)I_n - (I_n + A + A^2 + A^3 + A^4)A \\ &= I_n + A + A^2 + A^3 + A^4 - (A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5) \\ &= I_n + A + A^2 + A^3 + A^4 - A - A^2 - A^3 - A^4 - A^5 \\ &= I_n - A^5 \\ &= I_n \end{aligned}$$

Luego, $(I_n - A) \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n))$ e $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3 + A^4$

(3) Considere el $\mathbb{R}$ espacio vectorial $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{R})$, donde

- $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$

- $u+v=(x\cdot z, y\cdot t)$. Para $u=(x,y)\in\mathbb{V}$ y $v=(z,t)\in\mathbb{V}$
- $\lambda\cdot u=(x^{\lambda}, y^{\lambda})$. Para $u=(x,y)\in\mathbb{V}$ y $\lambda\in\mathbb{R}$

(a) Determine $0_{\mathbb{V}}$

Solución

- Sabemos que $u+O_{\mathbb{V}}=O_{\mathbb{V}}+u=u \quad (\forall u; u\in\mathbb{V})$
- Si suponemos que $O_{\mathbb{V}}=(a,b)\in\mathbb{V}$ y $u=(x,y)$ entonces dado que $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$ es un grupo conmutativo basta verificar $O_{\mathbb{V}}+u=u \quad (\forall u; u\in\mathbb{V})$

$$\begin{aligned}
O_{\mathbb{V}}+u=u &\iff (a,b)+(x,y)=(x,y)\\
&\iff (ax,by)=(x,y)\\
&\iff ax=x\wedge by=y\\
&\iff a=1\wedge b=1\\
&\iff O_{\mathbb{V}}=(1,1)
\end{aligned}$$

(b) Sea $\alpha=\{(1,2),(2,1)\}\subset\mathbb{V}$. Demuestre que α es una base de $\mathbb{V}$

Solución

- Por demostrar que α es Linealmente independiente.

  Supongamos que $a_1(1,2)+a_2(2,1)=O_{\mathbb{V}}$

$$\begin{aligned}
a_1(1,2)+a_2(2,1)=O_{\mathbb{V}} &\implies (1,2^{a_1})+(2^{a_2},1)=(1,1)\\
&\implies (2^{a_2},2^{a_1})=(1,1)\\
&\implies a_1=0\wedge a_2=0
\end{aligned}$$

  Luego, α es Linealmente independiente.

- Por demostrar que α es un sistema de generadores.

  Debemos mostrar que la ecuación $a_1(1,2)+a_2(2,1)=(x,y)$, tiene solución para cada $(x,y)\in\mathbb{V}$

$$\begin{aligned}
a_1(1,2)+a_2(2,1)=(x,y) &\iff (1,2^{a_1})+(2^{a_2},1)=(x,y)\\
&\iff (2^{a_2},2^{a_1})=(x,y)\\
&\implies a_1=\log_2(y)\wedge a_2=\log_2(x)\\
&\implies \log_2(y)(1,2)+\log_2(x)(2,1)=(x,y)
\end{aligned}$$

  Luego, α es un sistema de generadores, y así es una base de $\mathbb{V}$.

(c) Determine $[(4,16)]_{\alpha}$

Solución

Aplicando el resultado anterior tenemos que:

$$\left.\begin{array}{rcl}(4,16) & = & \log_2(16)(1,2)+\log_2(4)(2,1)\\ & = & \log_2(2^4)(1,2)+\log_2(2^2)(2,1)\\ & = & 4(1,2)+2(2,1)\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad [(4,16)]_\alpha = \begin{pmatrix} 4\\ 2\end{pmatrix}$$

(4) Considere $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x,y,z) = ((1-a)x+y+z, 2x+(2-a)y+2z, x+y+(1-a)z); \quad (a \in \mathbb{R})$$

(a) Demuestre que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \quad (\forall a; a \in \mathbb{R})$

Solución

Sean $u = (x,y,z)$ y $v = (r,s,t)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- P.d.q. $T(u+v) = T(u)+T(v)$

$$\begin{array}{rcl}T(u+v) & = & T(x+r, y+s, z+t)\\ & = & ((1-a)(x+r)+(y+s)+(z+t), 2(x+r)+(2-a)(y+s)+2(z+t),\\ & & (x+r)+(y+s)+(1-a)(z+t))\\ & = & ((1-a)x+y+z, 2x+(2-a)y+2z, x+y+(1-a)z)+\\ & = & ((1-a)r+s+t, 2r+(2-a)r+2t, r+s+(1-a)t)\\ & = & T(x,y,z)+T(r,s,t)\\ & = & T(u)+T(v)\end{array}$$

- P.d.q. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$

$$\begin{array}{rcl}T(\lambda u) & = & T(\lambda x, \lambda y, \lambda z)\\ & = & ((1-a)\lambda x+\lambda y+\lambda z, 2\lambda x+(2-a)\lambda y+2\lambda z, \lambda x+\lambda y+(1-a)\lambda z)\\ & = & \lambda((1-a)x+y+z, 2x+(2-a)y+2z, x+y+(1-a)z)\\ & = & \lambda T(u)\end{array}$$

Así que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \quad (\forall a; a \in \mathbb{R})$

(b) Determine los conjuntos:

$S_1 = \{a \in \mathbb{R} \mid T \text{ no es un isomorfismo}\}$

$S_2 = \{a \in \mathbb{R} \mid T \text{ es un isomorfismo}\}$

Solución

Sabemos del teorema de la dimensión que en este caso, T es un isomorfismo si y sólo si $ket(T) = \{(0,0,0)\}$

Luego, basta con estudiar núcleo de T.

$$
\begin{aligned}
u \in ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = 0_{\mathbb{V}} \\
&\iff u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge T(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\iff ((1-a)x + y + z, 2x + (2-a)y + 2z, x + y + (1-a)z) = (0,0,0) \\
&\iff \left.\begin{array}{lcl} (1-a)x + y + z &=& 0 \\ 2x + (2-a)y + 2z &=& 0 \\ x + y + (1-a)z &=& 0 \end{array}\right| \qquad (*) \\
&\iff \underbrace{\begin{pmatrix} (1-a) & 1 & 1 \\ 2 & (2-a) & 2 \\ 1 & 1 & (1-a) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Así que, el problema de resolver (*) (que siempre tiene solución !!!), se reduce a estudiar el rango de A, es decir:

$$(*) \text{ tiene solución única } \iff T \text{ es un isomorfismo}$$

Equivalentemente

$$(*) \text{ tiene infinitas soluciones } \iff T \text{ no es un isomorfismo}$$

Luego, para resolver (*) podemos por ejemplo escalonar A

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (1-a) & 1 & 1 \\ 2 & (2-a) & 2 \\ 1 & 1 & (1-a) \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & (1-a) \\ 2 & (2-a) & 2 \\ (1-a) & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & (1-a) \\ 0 & -a & 2a \\ 0 & a & 1-(1-a)^2 \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & (1-a) \\ 0 & -a & 2a \\ 0 & a & 2a - a^2 \end{pmatrix} \\
\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & (1-a) \\ 0 & -a & 2a \\ 0 & 0 & 4a - a^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Conclusión:

$$\begin{aligned}
(*) \text{ tiene infinitas soluciones} \iff & 4a - a^2 = 0 \\
\iff & a(4-a) = 0 \\
\iff & a = 0 \vee (4-a) = 0 \\
\iff & a = 0 \vee a = 4
\end{aligned}$$

Así que:

$S_1 = \{0, 4\}$

$S_2 = \mathbb{R} - \{0, 4\}$