Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep Nº 4 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
16 de Diciembre del 2002

(1) Considere la función $T:\mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i\right) = a_1 - a_2 x + a_0 x^2$$

Demuestre que T es un Isomorfismo de espacios vectoriales

Demostración:

Primero demostrar que T es una T.L.

Sea $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} a_i x^i$ y sea $q(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} b_i x^i$ entonces:

$$\begin{aligned} T(p(x)+q(x)) = T\left(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i + \sum_{i=0}^{2} b_i x^i\right) \quad &= T\left(\sum_{i=0}^{2}(a_i+b_i)x^i\right) \\ &= (a_1+b_1) - (a_2+b_2)x + (a_0+b_0)x^2 \\ &= (a_1 - a_2x + a_0x^2) + (b_1 - b_2x + b_0x^2) \\ &= T(p(x)) + T(q(x)) \end{aligned}$$

Ahora para ver que $T(\alpha p(x)) = \alpha T(p(x))$ es inmediato.

Luego T es una T.L.

Considere ahora el $kerT$

$$\begin{aligned} kerT \quad &= \{p(x)/T(p(x)) = 0 + 0x + 0x^2\} \\ &= \{p(x)/a_1 - a_2x + a_0x^2 = 0 + 0x + 0x^2\} \\ &= \{p(x)/a_1 = 0, a_2 = 0, a_0 = 0\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Usando el teorema de la dimensión se tiene:

$dim\mathbb{R}_2[x] = dim(kerT) + dim(ImT) \longrightarrow dim(ImT) = 3.$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

$\longrightarrow ImT = \mathbb{R}_2[x]$.

De todo lo anterior se concluye que Tes un isomorfismo.

(2) (i) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(M_{\mathbb{R}}(2))$ tal que verifique las siguientes propiedades:

(a) $(M_{\mathbb{R}}(2))_{-2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

(b) $(M_{\mathbb{R}}(2))_{1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Solución:

Considere $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $M_{\mathbb{R}}(2)$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, escribamos A en c.l de los vectores de la base.

$$\begin{aligned} A &= (a - b/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b/2 - c/3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ (c/3 - d/4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + d/4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando T se tiene:

$$\begin{aligned} T(A) &= (a - b/2) \cdot -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b/2 - c/3) \cdot -2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ (c/3 - d/4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + d/4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Asi

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= -2(a - b/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2(b/2 - c/3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ (c/3 - d/4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + d/4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2a + c & -2b + 2c \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Demuestre que la transformación T construida en la parte (i) es un isomorfismo.

Solución:

Considere la matriz asociada a T en la base B.

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y como $det([T]) = 4 \neq 0 \longrightarrow T$ es un isomorfismo.

(3) Sea $\alpha = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

(i) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

De la matriz de T se tiene que :

$$\begin{array}{lcl} T(1,0,1) = (1,0,1) + 5(1,1,1) & & T(1,0,1) = (6,5,6) \\ T(1,1,0) = (1,1,0) & \longrightarrow & T(1,1,0) = (1,1,0) \\ T(1,1,1) = 5(1,0,1) + (1,1,1) & & T(1,1,1) = (6,1,6) \end{array}$$

Ahora considere (x,y,z) y escribalo en c.l de los vectores de la base.

$(x,y,z) = (x-y)(1,0,1) + (x-z)(1,1,0) + (y-x+z)(1,1,1)$

Aplicando T se tiene:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= (x-y)(6,5,6) + (x-z)(1,1,0) + (y-x+z)(6,1,6) \\ &= (x+5z, 5x-4y, 6z). \end{aligned}$$

(ii) Demuestre que la transformación T construida en la parte (i) es diagonalizable.

Solución:

Construir el polinomio caracteristico de T a partir de $[T]_\alpha^\alpha$

$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 4)(\lambda - 6).$

Como el polinomio característico tiene 3 raices diferentes entonces T es diagonalizable.

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(V)$ tal que $T \neq I$. Demuestre que

$$T \circ T = T \Longrightarrow V_0 \neq \{0_V\}$$

Solución:

Determinaremos los valores propios de T.

Sea $v \neq 0$ vector propio asociado al valor propio λ. Se tiene:

$$\lambda v = T(v) = T(T(v)) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$$

Es decir

$$(\lambda^2 - \lambda)(v) = \lambda(\lambda - 1)v = 0$$

de este modo los valores propios de T son $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$. Como $T \neq I$, tenemos que $\lambda = 1$ NO puede ser el ÚNICO valor propio de T, es decir T debe tener $\lambda = 0$ como valor propio.

Es decir: $\exists v \neq 0, T(v) = 0 \cdot v \longrightarrow V_0 \neq \{0_V\}$