Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep Nº 1 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Primer semestre del 2002

(1) Demuestre que la proposición

$$[((\sim p \vee q) \Longrightarrow r) \wedge (r \Longrightarrow (s \vee t)) \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (\sim u \Longrightarrow \sim t)] \Longrightarrow p$$

es una tautología

Solución:

Sea $X = [((\sim p \vee q) \Longrightarrow r) \wedge (r \Longrightarrow (s \vee t)) \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (\sim u \Longrightarrow \sim t)]$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
X & \overset{\text{silogismo}}{\Longrightarrow} & \{(\sim p \vee q) \Longrightarrow (s \vee t)\} \wedge (\sim s \wedge \sim u) \wedge (t \Longrightarrow u) \\
& \overset{\text{asociatividad}}{\Longrightarrow} & \{(\sim p \vee q) \Longrightarrow (s \vee t)\} \wedge \sim s \wedge (\sim u \wedge (t \Longrightarrow u)) \\
& \overset{\text{M.Tollens}}{\Longrightarrow} & \{(\sim p \vee q) \Longrightarrow (s \vee t)\} \wedge \sim s \wedge \sim t \\
& \Longrightarrow & (\sim p \vee q) \Longrightarrow (s \vee t) \wedge \sim (s \vee t) \\
& \overset{\text{M.Tollens}}{\Longrightarrow} & \sim (\sim p \vee q) \\
& \Longrightarrow & p \wedge \sim q \\
& \Longrightarrow & p
\end{aligned}$$

Luego como X implica p entonces se tiene que :

$$X \Longrightarrow p \quad \text{es una tautología}$$

OBS: válido dem usando tablas de verdad.

(2) Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ tal que $a_k = 2k(2k+1)$ entonces calcule:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Solución:

Sea $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \cdots + a_n$ donde:

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 \cdot 3 = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) \\
a_2 &= 4 \cdot 5 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 + 1) \\
a_3 &= 6 \cdot 7 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 + 1) \\
a_4 &= 8 \cdot 9 = (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 4 + 1) \\
\vdots \ & \ \vdots \\
a_k &= (2 \cdot k) \cdot (2 \cdot k + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k)(2k+1)
$$

$$
= \sum_{k=1}^{n} [4k^2 + 2k]
$$

$$
= 4 \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} k
$$

$$
= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2}
$$

(3) Usando inducción, demostrar que:

$$
\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad \sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}
$$

Solución:

Sea

$$
p(n) : \sum_{j=1}^{n} j(j+1)(j+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}
$$

$$
p(1) : \ \sum_{j=1}^{1} j(j+1)(j+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}
$$

$$
1(1+1)(1+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}
$$

$$
6 = 6
$$

Es claro que $p(1)$ se cumple.

ii)Suponer que $p(k)$ verdadero , por demostrar $p(k+1)$.

$$p(k+1) : \sum_{j=1}^{k+1} j(j+1)(j+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} j(j+1)(j+2) &= \sum_{j=1}^{k} j(j+1)(j+2) + (k+1)(k+1+1)(k+1+2) \\
&\overset{Hip.Ind}{=} \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) \\
&= (k+1)(k+2)(k+3)(\frac{k}{4}+1) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}
\end{aligned}$$

Asi $p(k+1)$ se cumple , y $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadero.

(4) Sea $\{a_n\}$ una una progresión geométrica de razón 2 y tal que:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + 768 = 1533$$

Calcular

$$\sum_{i=1}^{7} a_i$$

Solución:

Sea $r = 2 \quad \wedge S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + 768 = 1533 \longrightarrow a_n = 768$

Necesitamos conocer a_1 y n.

Como $\{a_n\}$ una una progresión geométrica de razón 2,entonces:

- $S_n = a_1 \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1} = a_1 \cdot \dfrac{2^n - 1}{2 - 1} = a_1 \cdot (2^n - 1)$
- $a_n = a_1 r^{n-1}$
- $1533 = a_1 \cdot (2^n - 1)$
- $768 = a_1 \cdot 2^{n-1}$

Y de las dos últimas igualdades se tiene:

$$\frac{1533}{768} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{511}{256} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$$

$$256 \cdot 2^n - 256 = 511 \cdot 2^{n-1}$$

$$256 \cdot 2^n - 256 = \frac{511 \cdot 2^n}{2}$$

$$512 \cdot 2^n - 512 = 511 \cdot 2^n$$

$$2^n = 512 \longrightarrow 2^n = 2^9 \longrightarrow n = 9$$

$$\longrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 + 768 = \sum_{i=1}^{9} a_i = 1533$$

$$\longrightarrow 768 = a_1 \cdot 2^8 \;\; \longrightarrow a_1 = \frac{768}{256} \longrightarrow a_1 = 3 \longrightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Así $\displaystyle\sum_{i=1}^{7} a_i = \sum_{i=1}^{9} a_i - (a_8 + a_9) = 1533 - 3 \cdot 2^{8-1} - 768$