Solución PAS de Álgebra¹
Ingeniería Civil
Primer Semestre del 2002

(1) Sea $A \in \mathbb{M}_R(n)$ tal que $\det(A) \neq 0$.

Demostrar, usando inducción, que:

$$\det((A^{-1})^n) = (\det(A))^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración:

$$p(n) : \det((A^{-1})^n) = (\det(A))^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$p(1) : \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

Es claro que $p(1)$ se cumple.

ii) Suponer verdadero $p(k) : \det((A^{-1})^k) = (\det(A))^{-k}$

Por demostrar $p(k+1)$

$$p(k+1) : \det((A^{-1})^{k+1}) = (\det(A))^{-(k+1)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \det((A^{-1})^{k+1}) &= \det((A^{-1})^k(A^{-1})) \\ &= \det((A^{-1})^k) \det(A^{-1}) \\ &= \det(A)^{-k} \det(A)^{-1} \quad \text{por hipótesis de ind.y prop.de determinantes} \\ &= (\det(A))^{-k-1} \end{aligned}$$

Así $p(k+1)$ se cumple, y $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadero.

(2) Sean A y B matrices de orden 3 tal que:

$$\det(A) = 3, \quad \det(B^{-1}) = -2.$$

Si $H = A^{-1} \text{Adj}(B) A^4$ entonces calcule $\det(H)$

Solución:

Por las propiedades de determinante se tiene:

¹Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

$$\begin{aligned}
\det(H) &= \det(A^{-1} \cdot \text{Adj}(B) \cdot A^4) \\
&= \det(A^{-1}) \cdot \det(\text{Adj}(B)) \cdot \det(A^4) \\
&= (\det(A))^{-1} \cdot \det(B)^2 \cdot (\det(A))^4 \quad \text{ya que } \det(\text{Adj}(B)) = \det(B)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3^4 \\
&= \frac{27}{4}
\end{aligned}$$

(3) Sea $T : (G, *) \longrightarrow (G', *')$ un homomorfismo.

(a) Demuestre que si T tiene inversa por la izquierda entonces $\text{Ker}T = \{e_G\}$

Demostración:

$$\text{Sea } u \in \text{Ker}T \longrightarrow \begin{cases} T(u) = e_{G'} & \text{aplicando } T^{-1} \text{ por la izquierda} \\ T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(e_{G'}) \\ u = e_G \end{cases}$$

(b) Demuestre que si T tiene inversa por la derecha entonces T es epiyectiva.

Demostración:

$$\text{Sea } v \in G'. T^{-1} : (G', *') \longrightarrow (G, *) \longrightarrow T^{-1}(v) \in G$$

Llamémosle $u = T^{-1}(v) \in G$, $\longrightarrow$ como T tiene inversa por la derecha $\longrightarrow T(T^{-1}(v)) = v$, esto es:

$$\forall v \in G', \exists u = T^{-1}(v) \in G, T(u) = T(T^{-1}(v)) = v$$

(4) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ entonces determine el conjunto:

$$S = \{B \in M_{\mathbb{R}}(2) / B^2 = A\}$$

Solución:

$$\text{Sea } B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } B^2 = A \longrightarrow \begin{aligned} &1) a^2 + bc = 3 \\ &2) ab + bd = -2 \\ &3) ac + dc = -4 \\ &4) bc + d^2 = 3 \end{aligned}$$

De 1) y 4) se tiene que :

$$a^2 = d^2 \longrightarrow a = d \vee a = -d$$

Si $a = d$

En 2) se tiene $ab = -1 \rightarrow b = \frac{-1}{a}$

En 3) se tiene: $ac = -2 \rightarrow c = \frac{-2}{a}$

Así

$$B = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{a} \\ -\frac{2}{a} & a \end{pmatrix}$$

Volviendo a 1) y reemplazando b y c queda :

$$a^2 + \frac{2}{a^2} = 3 \rightarrow (a^2 - 2)(a^2 - 1) = 0$$

$$\rightarrow a = \sqrt{2} \vee a = -\sqrt{2} \vee a = 1 \vee a = -1$$

De donde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora si $a \neq d \rightarrow$ en 2) y 3) se produce contradicción.