

Solución Examen 1 de Álgebra¹
Ingeniería Civil
20 de Diciembre del 2002

(1) Si $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces demuestre usando

Inducción Matemática que la fórmula:

$$F(n): \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \left[\frac{n(n-1)}{2}\right] a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \text{ Es verdadera } (\forall n; n \in \mathbb{N})$$

Solución:

$$\text{Sea } F(1): \quad A = \begin{pmatrix} a & a^{1-1} & \left[\frac{1(1-1)}{2}\right] a^{1-2} \\ 0 & a & a^{1-1} \\ 0 & 0 & a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

es claro que $F(1)$ es verdadera.

Suponer verdadera $F(n)$ por demostrar $F(n+1)$.

$$F(n+1) =: \quad A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & \left[\frac{n(n+1)}{2}\right] a^{n-1} \\ 0 & a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Como :

¹Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

$$A^{n+1} = A^n \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \left[\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}\right] \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & \left[\frac{n(n+1)}{2} a^{n-1}\right] \\ 0 & a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

(aquí el alumno debe resolver el producto.)

De lo anterior se tiene que : $F(n+1)$ es verdadera y por tanto $\forall n \in \mathbb{N}, F(n)$ es verdadera.

(2) Sea $\alpha = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\} \subset \mathbb{R}_3[x]$

- Demuestre que α es una base de $\mathbb{R}_3[x]$

Solución:

Considere

$$a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 = 0$$

$$\longrightarrow (a-b+c-d) + (b-2c+3d)x + (c-3d)x^2 + dx^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

$$\longrightarrow a = b = c = d = 0$$

Luego el conjunto es l.i y como la $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4$ y son 4 vectores l.i entonces es base de $\mathbb{R}_3[x]$.

- Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_3[x]$ entonces determine $[p(x)]_\alpha$

Solución:

Es claro que:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0 + a_1 + a_2) \cdot 1 + (a_1 + 2a_2)(x-1) + a_2(x-1)^2 + 0(x-1)^3$$

$$\text{lo que implica que : } [p(x)]_\alpha = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 \\ a_1 + 2a_2 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) Considere $T \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ y $H \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } H(1, 0) = (1, 2, 3) \text{ y } H(1, 1) = (0, 0, 1)$$

donde $\alpha = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y $\beta = \{(1, 0), (1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Demuestre que $H \circ T \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ y decida si es un isomorfismo.

Solución:

De la matriz asociada a T se tiene:

$$T(1, 0, 1) = (1, 0) - (1, 1) = (0, -1)$$

$$T(1, 1, 0) = (1, 0) + 2(1, 1) = (3, 2)$$

$$T(1, 1, 1) = (1, 0) + 0(1, 1) = (1, 0)$$

$$\forall (x, y, z) \text{ se tiene: } (x, y, z) = (x - y)(1, 0, 1) + (x - z)(1, 1, 0) + (y - x + z)(1, 1, 1)$$

aplicando T nos queda:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x - y)(0, -1) + (x - z)(3, 2) + (y - x + z)(1, 0) \\ \longrightarrow T(x, y, z) &= (2x + y - 2z, x + y - 2z) \end{aligned}$$

$$\text{Ahora } \forall (x, y) \text{ se tiene: } (x, y) = (x - y)(1, 0) + y(1, 1)$$

aplicando H se tiene:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= (x - y)H(1, 0) + yH(1, 1) \\ H(x, y) &= (x - y)(1, 2, 3) + y(0, 0, 1) \\ \longrightarrow H(x, y) &= (x - y, 2x - 2y, 3x - 2y) \end{aligned}$$

Ahora hallar HoT

$$HoT(x, y, z) = H(T(x, y, z)) = H(2x + y - 2z, x + y - 2z) = (x, 2x, 4x + y - 2z)$$

Es muy fácil ver que HoT es una T.L. (El alumno debe demostrarlo.)

Por otro lado $\ker(HoT) \neq \{0\}$ ya que por ejemplo $(0, 2, 1) \in \ker(HoT)$ pues $HoT(0, 2, 1) = (0, 0, 0)$.

así se tiene que HoT no es un isomorfismo.

- (4) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que $T(A) = A^t$. Demuestre que T es diagonalizable.

Solución:

Considere la base canónica de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, sea ésta $\alpha = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, entonces la matriz asociada a T en la base canónica está dada por:

$$[T]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde se tiene que el polinomio característico es:
 $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1) \longrightarrow$ los v.p son $1, -1$.

Además no es difícil ver que :

$$V_1 = \{A/A \text{ es simétrica}\} \longrightarrow \dim V_1 = 3 = ma(1)$$

$$V_{-1} = \{A/A \text{ es antisimétrica}\} \longrightarrow \dim V_{-1} = 1 = ma(-1)$$

De donde se concluye que T es diagonalizable.

(Aquí el alumno puede ver que es diagonalizable mostrando que el polinomio minimal es $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$.)